

Devoir à la maison 2

à rendre le lundi 25 septembre 2017

Exercice 1:

Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} - 3x - 1 = 0$.

Exercice 2:

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne également $\ln(2) \simeq 0.69$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f .
2. (a) Donner la position relative de la droite Δ d'équation $y = x$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.
(b) Préciser la limite en $+\infty$ de $x - f(x)$. Interprétation graphique ?
3. (a) Calculer f'' , dérivée de f' .
(b) Résoudre alors l'équation $f''(x) = 0$, qui donne les abscisses des points d'inflexion. En ces points là, la courbe traverse la tangente (*Résultat admis pour l'instant, mais qui doit être utilisé pour la question 4.*).
4. ** Dessiner la courbe de f , après avoir précisé (et positionné) l'origine et les deux points d'inflexion, ainsi que les 3 tangentes correspondantes. Pour s'aider, on pourra choisir un repère d'unité graphique d'au moins 2 centimètres, dessiner également la droite Δ , et utiliser le résultat suivant :
si $f'' \geq 0$, la fonction est dite convexe, et la courbure est "vers le haut" (exemple : la fonction carrée ou exp).
si $f'' \leq 0$, la fonction est dite concave, et la courbure est "vers le bas" (exemple : la fonction ln ou racine).
5. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Montrer que la suite est décroissante.
(b) Etablir que la suite converge, et déterminer sa limite.
(c) Montrer alors que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
(e) Majorer alors $\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.

Devoir à la maison 2

à rendre le lundi 25 septembre 2017

Exercice 3:

Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} - 3x - 1 = 0$.

Exercice 4:

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne également $\ln(2) \simeq 0.69$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f .
2. (a) Donner la position relative de la droite Δ d'équation $y = x$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.
(b) Préciser la limite en $+\infty$ de $x - f(x)$. Interprétation graphique ?
3. (a) Calculer f'' , dérivée de f' .
(b) Résoudre alors l'équation $f''(x) = 0$, qui donne les abscisses des points d'inflexion. En ces points là, la courbe traverse la tangente (*Résultat admis pour l'instant, mais qui doit être utilisé pour la question 4.*).
4. ** Dessiner la courbe de f , après avoir précisé (et positionné) l'origine et les deux points d'inflexion, ainsi que les 3 tangentes correspondantes. Pour s'aider, on pourra choisir un repère d'unité graphique d'au moins 2 centimètres, dessiner également la droite Δ , et utiliser le résultat suivant :
si $f'' \geq 0$, la fonction est dite convexe, et la courbure est "vers le haut" (exemple : la fonction carrée ou exp).
si $f'' \leq 0$, la fonction est dite concave, et la courbure est "vers le bas" (exemple : la fonction ln ou racine).
5. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Montrer que la suite est décroissante.
(b) Etablir que la suite converge, et déterminer sa limite.
(c) Montrer alors que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
(e) Majorer alors $\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.