Devoir à la maison 5 — à rendre le lundi 27 novembre 2017

Exercice 1:

Feuille 6 : faire l'exercice 14, question 2 (en montrant que g est bijective puis en trouvant g^{-1}) puis faire l'exercice 16, fonction f_2 (montrer tout d'un coup en choisissant l'énoncé de bijection avec les quantificateurs)

Pour ceux qui veulent en faire plus : Feuille 6 exercice 13, question 3

Exercice 2:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, et on ajoute une boule de la couleur qui vient d'être tirée avant le tirage suivant.

1. Introduire des événements adaptés à l'expérience.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
3. Soit A_n l'événement "on n'obtient que des boules noires lors des n tirages", resp. C_n "on obtient exactement une blanche au cours des n tirages". Décrire les événements A_n et C_n, puis calculer $P(A_n)$ et $P(C_n)$.
4. Soit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, T_k " on obtient la première boule blanche au k^{ie} tirage.
   (a) Calculer $P(T_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (ne pas oublier de commencer par décrire les événements).
   (b) Justifier que pour tout $k \geq 1$: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Vérifier alors par le calcul que $\sum_{k=1}^{n} P(T_k) + P(A_n) = 1$.
   Comment aurait-on pu faire autrement ?

Exercice 3:

Une puce évolue sur trois cases A, B et C de façon aléatoire selon la règle suivante : à l'instant 0, la puce se trouve sur la case A, puis lorsque la puce se trouve sur une certaine case à un instant donné, elle se déplace à l'instant suivant, sur l'une quelconque des autres cases de façon équiprobable. On note A_n (resp. B_n, C_n) les événements : "à l'instant n, la puce est sur la case A (resp. B, C)", et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Déterminer a_1, b_1 et c_1, puis justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n + c_n = 1$.
2. A l'aide la formule des probabilités totales, exprimer a_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
3. Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$.
   En déduire l'expression de a_n en fonction de n. La limite de a_n quand n tend vers l'infini, vous surprend-elle ?

Devoir à la maison 5 — à rendre le lundi 27 novembre 2017

Exercice 4:

Feuille 6 : faire l'exercice 14, question 2 (en montrant que g est bijective puis en trouvant g^{-1}) puis faire l'exercice 16, fonction f_2 (montrer tout d'un coup en choisissant l'énoncé de bijection avec les quantificateurs)

Pour ceux qui veulent en faire plus : Feuille 6 exercice 13, question 3

Exercice 5:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, et on ajoute une boule de la couleur qui vient d'être tirée avant le tirage suivant.

1. Introduire des événements adaptés à l'expérience.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
3. Soit A_n l'événement "on n'obtient que des boules noires lors des n tirages", resp. C_n "on obtient exactement une blanche au cours des n tirages". Décrire les événements A_n et C_n, puis calculer $P(A_n)$ et $P(C_n)$.
4. Soit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, T_k " on obtient la première boule blanche au k^{ie} tirage.
   (a) Calculer $P(T_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (ne pas oublier de commencer par décrire les événements).
   (b) Justifier que pour tout $k \geq 1$: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Vérifier alors par le calcul que $\sum_{k=1}^{n} P(T_k) + P(A_n) = 1$.
   Comment aurait-on pu faire autrement ?

Exercice 6:

Une puce évolue sur trois cases A, B et C de façon aléatoire selon la règle suivante : à l'instant 0, la puce se trouve sur la case A, puis lorsque la puce se trouve sur une certaine case à un instant donné, elle se déplace à l'instant suivant, sur l'une quelconque des autres cases de façon équiprobable. On note A_n (resp. B_n, C_n) les événements : "à l'instant n, la puce est sur la case A (resp. B, C)", et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Déterminer a_1, b_1 et c_1, puis justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n + c_n = 1$.
2. A l'aide la formule des probabilités totales, exprimer a_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
3. Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$.
   En déduire l'expression de a_n en fonction de n. La limite de a_n quand n tend vers l'infini, vous surprend-elle ?