

Travail libre : Questions de révisions :

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. On considère l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ ainsi que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
 $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$.
 - (a) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}^+$.
 - (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer f' en fonction de g .
 - (c) Dresser le tableau de variations complet de f .
 - (d) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$, puis vérifier que $\alpha \in]0, 1[$.

A rédiger et à me rendre : option 1 "l'incontournable" : question + exercice 1 + exercice 2
 option 2 (pour ceux qui ont eu au moins 10 au DS 3, et qui le souhaitent) : question + exercice 3 + exercice 2.

Question : Soit E, F, G trois espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
 Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.

Exercice 1: Soit f l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :
 $f(P) = P'' + X^2 P' - 3X(P - P(0))$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base du noyau $\text{Ker}(f)$. f est-elle injective ?
3. Déterminer une base de l'image $\text{Im}(f)$. f est-elle surjective ?

Exercice 2: Dans tout l'énoncé, p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

Sur une table sont placées deux boules noires (étape 0). Une des deux boules est choisie au hasard et éliminée de la table. Ensuite on repose sur la table : soit une boule blanche, avec la probabilité p , soit une boule noire, avec la probabilité q . On a alors atteint l'étape 1. Cette action est répétée ainsi indéfiniment, de sorte qu'à chaque étape k , deux boules sont sur la table : soit deux noires, soit une noire et une blanche, soit deux blanches.

A chaque étape, une des deux boules est choisie au hasard puis remplacée comme précédemment soit par une boule blanche avec la probabilité p soit par une boule noire avec la probabilité q .

On introduit pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_k qui est égale au nombre de boules blanches sur la table à l'étape k .

On pose par ailleurs $M = \begin{pmatrix} q & \frac{q}{2} & 0 \\ p & \frac{1}{2} & q \\ 0 & \frac{p}{2} & p \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $U_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit PD puis le produit MP , et vérifier que $MP = PD$.
2. Déterminer U_0 puis U_1 .
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer pour tout couple $(i, j) \in \{0, 1, 2\}^2$, $P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j)$. (Justifier rapidement les 9 valeurs).
4. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_{k+1} = MU_k$.
5. Montrer alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$.
6. En déduire pour tout entier naturel k non nul la loi de X_k .
7. Déterminer alors pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, la limite de $P(X_k = i)$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Exercice 3:

Soit a, b, c trois réels tels que $a < b < c$.

On considère l'application u de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le triplet $(P(a), P(b), P(c))$.

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est injective.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$. Montrer que u est surjective.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_2[X]$, que l'on explicitera, tel que $A(a) = 1$, $A(b) = 0$, $A(c) = 0$ (on pourra raisonner par analyse et synthèse, sans passer par un système).
 (b) Donner sans justification l'expression des deux polynômes B et C de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :
 $B(a) = 0 = B(c)$ et $B(b) = 1$ et $C(a) = C(b) = 0$ et $C(c) = 1$.
5. (a) Montrer que (A, B, C) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ (soyez malins !).
 On admet que cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (car elle a le "bon nombre" de vecteurs ... cf chap suivant)
 (b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (A, B, C) .

Pour ceux qui veulent en faire plus : je conseille les probabilités du DM 8 de l'année 2015-16