Corrigé du devoir maison 3

Exercice 1 :

1. Ne pas confondre l'ensemble de définition avec l'ensemble où il peut y avoir des solutions ! Ici, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x^2-1| \geq 0$, l'équation est bien $\boxed{\text{définie sur } \mathbb{R}}$. Mais si $x-5<0$ ($\Leftrightarrow x \in]-\infty, 5[$), l'équation ne peut avoir de solutions puisque $x-5<0$ et $\sqrt{|x^2-1|} \geq 0$.
Puis si $x \geq 5$, on a $x-5 \geq 0$ et $\sqrt{|x^2-1|} \geq 0$ d'où l'équivalence :
$\sqrt{|x^2-1|} = x-5 \Leftrightarrow |x^2-1| = (x-5)^2 \Leftrightarrow x^2-1 = (x-5)^2$ (car pour $x \geq 5$, $x^2-1 \geq 0$) $\Leftrightarrow 10x-26=0 \Leftrightarrow x = 2.6 < 5$. L'équation n'a donc aucune solution.

2. $\cos(5x) = 0 \Leftrightarrow \cos(5x) = \cos(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \\ 5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.
Donc sur $\mathbb{R}$, l'ensemble solution est $\{\frac{\pi+2k\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}\}$.
Pour trouver les solutions x_k qui appartiennent à l'intervalle $[0, \pi[$, il reste encore à identifier les bonnes valeurs pour $k \in \mathbb{Z}$: Pour $k=0$, $x_k = \frac{\pi}{10} \in [0, 2\pi[$, pour $k \leq -1$, $x_k \leq \frac{-\pi}{10} < 0$. Puis pour $k=1$, $x_k = \frac{3\pi}{10}$ ... pour $k=4$, $x_4 = \frac{9\pi}{10} \in [0, \pi[$, puis pour $k \geq 5$, $x_k \geq \frac{11\pi}{10} > \pi$. Il y a donc 5 solutions sur $[0, \pi[$: $\{\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}\}$.
Pour l'équation $\cos(nx) = 0$ le raisonnement est rigoureusement le même : on remplace le 5 par n.
On trouve comme ensemble solution sur $\mathbb{R}$: $\{\frac{\pi+2k\pi}{2n}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in \mathbb{Z}\}$. Sur $[0, \pi[$, les entiers k qui conviennent sont : $k = 0$, ..., $k = n-1$ (les tester comme ci-dessus !). il y a donc n solutions.

Exercice 2 :

1. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Donc f admet un minimum en $x=1$ (faire TV). De plus, en 0, pas de FI $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et en $+\infty$, d'après les croissances comparées, comme $f(x) = x(1 - \frac{\ln x}{x})$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Attention de bien couvrir tout l'intervalle $]0, +\infty[$ SANS chevauchement (soit étude sur $]0, 1]$, puis sur $]1, +\infty[$, mais alors penser à vérifier $a \neq 1$, soit sur $]0, 1[$ puis $[1, +\infty[$, mais vq $b \neq 1$ soit sur $]0, 1[$, $\{1\}$ et $]1, +\infty[$). Dernière option. Sur $]0, 1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Puisque $2 \in]1, +\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) = 2$.
De même, sur $]1, +\infty[$: il existe un unique réel $b \in]1, +\infty[$ tel que $f(b) = 2$. Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$. Conclure.
b) $f(2) = 2 - \ln(2) \leq 2$ car $\ln(2) \geq \ln(1) = 0$, et $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2)$ d'où $f(4) - 2 = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2)) \geq 0$ puisque $\ln(2) \leq \ln(e) = 1$. Donc $f(2) \leq 2 = f(b) \leq f(4)$ et par stricte croissance de f, on obtient $2 \leq b \leq 4$.

3. Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "u_n existe et $u_n \geq b$".
Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après 2.b).
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2 \geq \ln(b) + 2 = b$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) \Leftrightarrow 2 = b - \ln(b) \Leftrightarrow \ln(b) + 2 = b$. Conclure.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) + 2 - u_n = 2 - (u_n - \ln(u_n)) = 2 - f(u_n)$ Mais $u_n \geq b$ et f est croissante sur $[b, +\infty[\subset [1, +\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc $u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0$. Ainsi, la suite est décroissante.
b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de plus minorée par b d'après **3.**, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient $\ell = \ln(\ell) + 2$ ou encore $f(\ell) = 2$. Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $[b, +\infty[$, on a $\ell = b$. Donc la suite converge vers b.

5. a) g est dérivable sur $[b, +\infty[$ et pour tout $x \geq b$, on a $g'(x) = \frac{1}{x}$. D'où pour $x \geq b > 0$, on a $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b}$. Il reste à utiliser $b \geq 2$ pour obtenir : $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$.
b) On utilise l'inégalité des accroissements finis en $x = u_n \geq y = b$: $0 \leq g(u_n) - g(b) \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$. Or $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$. D'où le résultat attendu.
c) La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b$.
Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
Pour $n = 0$, puisque $b \in [2; 4]$ d'après **3**, il vient $u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2$et par ailleurs $\frac{1}{2^{0-1}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2^1 = 2$.
Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Montrons que $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2^n}$.
Alors, il suit de 5.b) que $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{(n+1)-1}} = \frac{1}{2^n}$. Conclure.

6. Comme u_n tend vers b, u_n va bien fournir une valeur approchée de b si n est assez grand. On veut ici contrôler l'approximation en choisissant un bon n. Or d'après 5. c), on a un encadrement sur l'écart entre u_n et b.
Il suffit donc de choisir un entier n tel que $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3}$ car alors on est sûr que $0 \leq u_n - b \leq 10^{-3}$ (par enchaînement).
On résout : $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 10^3 \leq 2^{n-1} \Leftrightarrow 3\ln(10) \leq (n-1)\ln(2)$ (par stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow n \geq 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)} + 1$ puisque $\ln(2) > 0$. Le premier entier qui convient est donc :$n_0 = \lfloor 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)} + 1 \rfloor + 1$.