Devoir à la maison 13 à rendre le lundi 6 mai 2019

UNE COPIE PAR BINOME :
chacun doit rédiger une partie ET RELIRE la partie de l'autre, pour éventuellement la corriger (dans une autre couleur).

Exercice 1:

1. Soit $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P(1) = 0\}$. Montrer que H est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa dimension.
2. Généralisation du résultat :
   Soit $H_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, P(1) = 0\}$. Montrer que H est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.

Exercice 2:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.
2. Déterminer I_0 et I_1. (pour I_0, on pourra s'aider d'un résultat de cours).
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$.

Exercice 3:

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
On pourra utiliser sans justification que $x + \ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$, et que $2 < e < 3$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1, w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) * Montrer que : $w_{n+1} - w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
   (b) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel noté γ et appelé **constante d'Euler**.
2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$: $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite v est convergente.
   indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $k \geq 3$, $\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(k)}{k}$.
5. (a) ** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_{2n} = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$.
   indication : remarquer $\sum\limits_{k=1}^{2n} ... = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\,pair}}^{2n} ... + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\,impair}}^{2n} ...$ et l'appliquer deux fois
   (b) En déduire que $S_{2n} = \ln(2) \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$
6. Démontrer alors que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$

TRAVAIL LIBRE :

— Algèbre linéaire (pour ceux qui ont des difficultés) : DM 11 année 2017-18 exercice 1.

— Intégrales impropres : DM 11 année 2017-18, exercice 3.
Le début est classique (donc accessible par tous) ; la fin plus technique (à partir de la question 5.)