

Devoir à la maison 2

à rendre au plus tard le lundi 17 septembre

On considère l'application f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}$.

1. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Établir : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln x + \frac{1}{x} > 0$.
3. Déterminer la limite de f en 0 (et interpréter graphiquement), puis en $+\infty$.
Déterminer alors la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$: que pourrait être l'interprétation graphique ?
4. Dresser le tableau de variations complet de f .
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α . Vérifier alors que $\alpha < 1$.
6. Tracer l'allure de C . On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
8. ** Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e^n$.
Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

On considère enfin les fonctions $F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ et $G(x) = F(x) - e^x$ définies sur $]0, +\infty[$.

9. Rappeler les propriétés vues en terminale sur la fonction F .
10. Exprimer la dérivée G' en fonction de f et de l'exponentielle.
11. a) Montrer que G admet une tangente horizontale en x ssi $x + \ln x = e$.
b) En reprenant une étude faite ci-dessus, en déduire que G admet une unique tangente horizontale.

Devoir à la maison 2

à rendre au plus tard le lundi 17 septembre

On considère l'application f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}$.

1. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Établir : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln x + \frac{1}{x} > 0$.
3. Déterminer la limite de f en 0 (et interpréter graphiquement), puis en $+\infty$.
Déterminer alors la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$: que pourrait être l'interprétation graphique ?
4. Dresser le tableau de variations complet de f .
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α . Vérifier alors que $\alpha < 1$.
6. Tracer l'allure de C . On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
8. ** Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e^n$.
Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

On considère enfin les fonctions $F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ et $G(x) = F(x) - e^x$ définies sur $]0, +\infty[$.

9. Rappeler les propriétés vues en terminale sur la fonction F .
10. Exprimer la dérivée G' en fonction de f et de l'exponentielle.
11. a) Montrer que G admet une tangente horizontale en x ssi $x + \ln x = e$.
b) En reprenant une étude faite ci-dessus, en déduire que G admet une unique tangente horizontale.