Devoir à la maison 9 — à rendre le lundi 4 février 2019

Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher. La proportion de boules rouges est $p \in]0,1[$ et celle de boules noires est $q = 1-p$. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à obtention d'une boule rouge. Un maximum de n tirages, avec $n \geq 1$, est cependant fixé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du n^e tirage. On note G_n la variable aléatoire égale au rang d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue au cours des des n tirages.

1. (a) Déterminer $G_n(\Omega)$ puis pour tout $k \in G_n(\Omega)$, $P(G_n = k)$.

   (b) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k \in G_n(\Omega)} P(G_n = k) = 1$. Comment aurait-on pu justifier autrement ?

   (c) En utilisant la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, montrer que l'on a $E(G_n) = \frac{1-q^n(1+np)}{p}$.

2. Simulation informatique :
   a) Rappeler la probabilité de l'événement décrit par la syntaxe `rand()<p`.
   b) Compléter le programme suivant afin que G renvoie une simulation de G_n.

```
n=input('entrer n') ; p=input('entrer p');
k=0 ; x=0;
while (x==0)&(k≤ n-1)
k=-------
if ------ then x=-------- end
end
if x==0 then, G=------, else G=------,end
disp(G)
```

3. Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue au cours des n tirages. On pourra supposer dans cette question que $n \leq 20$.
   On mise de la manière suivante : pour jouer une partie, il faut payer 15 euros. Si la partie est gagnée à la k^e boule tirée, ($k \leq n$), le joueur gagne $(20-k)$ euros. On pose B_n le gain aléatoire relatif pour une partie.

   (a) Déterminer la loi de B_n.

   (b) Déterminer l'espérance de B_n.

4. Comment compléter le programme de la question 2. afin qu'il affiche de plus la valeur du gain correspondante ?

Facultatif (travail libre) : exercice 2 DM 7 2017-18

Devoir à la maison 9 — à rendre le lundi 4 février 2019

Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher. La proportion de boules rouges est $p \in]0,1[$ et celle de boules noires est $q = 1-p$. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à obtention d'une boule rouge. Un maximum de n tirages, avec $n \geq 1$, est cependant fixé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du n^e tirage. On note G_n la variable aléatoire égale au rang d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue au cours des des n tirages.

1. (a) Déterminer $G_n(\Omega)$ puis pour tout $k \in G_n(\Omega)$, $P(G_n = k)$.

   (b) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k \in G_n(\Omega)} P(G_n = k) = 1$. Comment aurait-on pu justifier autrement ?

   (c) En utilisant la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, montrer que l'on a $E(G_n) = \frac{1-q^n(1+np)}{p}$.

2. Simulation informatique :
   a) Rappeler la probabilité de l'événement décrit par la syntaxe `rand()<p`.
   b) Compléter le programme suivant afin que G renvoie une simulation de G_n.

```
n=input('entrer n') ; p=input('entrer p');
k=0 ; x=0;
while (x==0)&(k≤ n-1)
k=-------
if ------ then x=-------- end
end
if x==0 then, G=------, else G=------,end
disp(G)
```

3. Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue au cours des n tirages. On pourra supposer dans cette question que $n \leq 20$.
   On mise de la manière suivante : pour jouer une partie, il faut payer 15 euros. Si la partie est gagnée à la k^e boule tirée, ($k \leq n$), le joueur gagne $(20-k)$ euros. On pose B_n le gain aléatoire relatif pour une partie.

   (a) Déterminer la loi de B_n.

   (b) Déterminer l'espérance de B_n.

4. Comment compléter le programme de la question 2. afin qu'il affiche de plus la valeur du gain correspondante ?

Facultatif (travail libre) : exercice 2 DM 7 2017-18