Eléments de correction du travail facultatif supplémentaire

Exercice : `Ecricome S 2012`

1. (a) Soit $a > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $x > 0$. Comme $a \neq 0$, $\int_0^x e^{-at}dt = [-\frac{1}{a}e^{-at}]_0^x = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}e^{-ax} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$ car $a > 0$. Donc l'intégrale I_a converge et $I_a = \frac{1}{a}$.

   (b) Soit $x \geq 0$. Les intégrandes sont continus et positifs. De plus, $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq \frac{1}{e^t} = e^{-t}$. Comme l'intégrale I_1 converge, d'après le critère par comparaison, on en déduit que l'intégrale $f(x)$ converge. (ou passer par les équivalents : $\frac{1}{x+e^t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^t}$). De même pour $g(x)$: $0 \leq \frac{1}{(x+e^t)^2} \leq \frac{1}{e^{2t}} = e^{-2t}$ ou...

2. (a) Comme $x \geq 0$, $x = (\sqrt{x})^2$ et de même $e^t = (\sqrt{e^t})^2$ d'où $x + e^t - 2\sqrt{xe^t} = (\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0$.

   (b) a) $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq \frac{1}{2\sqrt{xe^t}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-t/2}$. Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t}dt$ converge et vaut $f(x)$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt$ converge et vaut 2 (c'est $I_{1/2}$), d'où par croissance de l'intégrale, (bornes dans le bon sens), et lin. (à vous de me mettre tous les arguments dans le bon ordre !) : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}I_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. Soit $0 \leq x < y$. Par linéarité, $f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}dt = (y - x)\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}dt$. Or $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 < \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leq \frac{1}{e^t \times e^t} = e^{-2t}$, et comme toutes les intégrales en jeu convergent, par stricte croissance de l'intégrale, $0 < \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leq \int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = I_2 = \frac{1}{2}$. (l'inégalité stricte étant justifiée puisque de plus "$0 < +\infty$"). En multipliant par $y - x > 0$, on obtient bien le résultat : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{1}{2}(y - x)$.

4. (a) Pour tout $0 \leq x < y$, on a $0 < f(x) - f(y)$ càd $f(y) < f(x)$. D'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Si $x < y$, d'après 3. $|f(y) - f(x)| = f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2} = \frac{|y-x|}{2}$. Si $x = y$, le résultat est évident. Enfin, si $x > y$, d'après 3. (en échangeant les rôles du x et du y), $|f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) \leq \frac{x-y}{2} = \frac{|y-x|}{2}$.

   (c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. D'après b), $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. D'où (théorème d'encadrement), $f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ càd $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ et f est continue en x_0. Vrai $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+$. Donc f continue sur $\mathbb{R}_+$.

5. f est continue et strictement décroissante (par 4.) sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = I_1 = 1$ et d'après 2.b), $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (théorème d'encadrement). D'où (théorème de la bijection), f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$.

6. Posons $g(x) = f(x) - x = f(x) + (-x)$ sur $\mathbb{R}_+$. g est la somme de 2 fonctions continues strictement décroissantes donc est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $g(0) = f(0) = 1$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $] - \infty, 1]$. Comme $0 \in] - \infty, 1]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (déf de la bijection). Enfin, $\alpha = f(\alpha) \in]0, 1]$, vu les variations de f.

7. (a) Fixer n. Puis il suffit d'appliquer 4.(b) en u_n et α (attention, pas d'IAF ici !). On pourrait commencer par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et $u_n \geq 0$ (récurrence simple).

   (b) Par récurrence : *initialisation* : attention, bien gérer les valeurs absolues ! $|u_0 - \alpha| = | - \alpha| = \alpha$ car $\alpha \geq 0$. D'où comme $\alpha \leq 1$, on peut conclure !
   hérédité. Si $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

   (c) Comme la suite u converge vers α, dès que n suffisamment grand, u_n fournira une bonne valeur approchée de α. Soit trouver à la main le premier entier n_0 tel que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$ puis utiliser une boucle `for`. Soit utiliser une boucle while avec comme condition d'arrêt $1/2^n > 10^{-3}$...

8. (a) Par linéarité (toutes les intégrales convergent) : $f(x + h) - f(x) + hg(x) = \int_0^{+\infty}[\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}]dt$. Mettre alors au même dénominateur (choisir le plus petit !) et après calcul on obtient : $f(x + h) - f(x) + hg(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h^3}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}dt = h^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}dt$. D'où $|f(x + h) - f(x) + hg(x)| \leq |h^2| \int_0^{+\infty} |\frac{1}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}|dt$ (inégalité triangulaire) $= h^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}dt \leq h^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t(e^t)^2}dt$ (car $x + h \geq 0$) $= h^2 I_3 = \frac{h^2}{3}$.

   (b) Soit $x > 0$ fixé. D'après le a), pour tout $h \neq 0$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + g(x)\right| = \left|\frac{f(x+h)-f(x)+hg(x)}{h}\right|$ $= \frac{|f(x+h)-f(x)+hg(x)|}{|h|} \leq \frac{h^2}{3|h|}$. Or $\frac{h^2}{|h|} = |h|$. D'où $|\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} + g(x)| \leq \frac{|h|}{3} \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$. Théorème d'encadrement, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + g(x) \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$ càd $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{h\to0}{\longrightarrow} -g(x) \in \mathbb{R}$ (x est fixé)
   On en conclut que f est dérivable au point x et que $f'(x) = -g(x)$. Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

9. T est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après 8.(b)). De plus, pour tout $x > 0$, $T'(x) = f(x) + xf'(x) = f(x) - xg(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x + e^t} - \dfrac{x}{(x + e^t)^2}dt$ (par linéarité) $= \int_0^{+\infty} \dfrac{e^t}{(x + e^t)^2}dt$. On reconnait une primitive, et comme l'intégrale en jeu est convergente $T'(x) = \lim\limits_{A\to+\infty}[-\frac{1}{x+e^t}]_0^A = \lim\limits_{A\to+\infty}(-\frac{1}{x+e^A} + \frac{1}{x+1}) = \frac{1}{x+1}$.
   Enfin, T est une primitive de T', $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, donc il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x > 0$, $T(x) = \ln(|1+x|)+c$. Or $\lim\limits_{x\to0} T(x) = 0$ puisque $f(0) = 1$ donc $c = 0$. Finalement, pour tout $x > 0$, $T(x) = \ln(1 + x)$.