Corrigé du devoir maison 3 `inspiré d'esc E 2000`

1. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2+x+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ car le discriminant du trinôme x^2+x+1 est $\Delta = -3 < 0$.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$. Comme $-x^2+1>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$, on obtient le TV. Comme $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(c) $f(x)-x = \frac{x-x(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \frac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$. Faire alors le tableau de signe. En particulier, on trouve 2 points d'intersection -1 et 0. (d) Eq tangente : $y=x$ (puisque $f'(0)=1$ et $f(0)=0$)

2. (a) $f(\frac{1}{p}) = \frac{\frac{1}{p}}{(\frac{1}{p})^2+\frac{1}{p}+1} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1+p+p^2}{p^2}} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1+p} \leq \frac{1}{1+p}$ car $p>0$ Ou faire $\frac{1}{p+1} - f(\frac{1}{p}) = ... = \frac{1}{(p+1)(1+p+p^2)} \geq 0$.

(b) A montrer "$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$" ; *cas n=0* : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 1$. Puis, supposons que pour un certain n, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Alors, comme f est strictement croissante sur $[0,1]$ donc sur $[0, \frac{1}{n+1}]$, on obtient $f(0) < f(u_n) \leq f(\frac{1}{n+1})$. Or $f(0)=0$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\frac{1}{n+1}) \leq \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$ d'où $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$. Conclusion.

(c) Théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (d) $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+u_n+1}$ d'où $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2+u_n+1}{u_n} = u_n+1+1/u_n$.

(e) $n=1$: $\frac{1}{u_1} = u_0+1+\frac{1}{u_0} = 3$ et $1+1+\sum\limits_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = 3$. Supp $\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Mq $\frac{1}{u_{n+1}} \leq n+2+\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. Or $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n+1+\frac{1}{u_n} \leq u_n+1+(n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k})$[H.R.] $\leq \frac{1}{n+1}+1+n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ [2.b)] $= n+2+\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. Ccl.

(f) Faire l'étude de la fonction $g(x) = \ln(x)-\ln(x-1)-\frac{1}{x}$ sur $[2,+\infty[$. $g'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2(x-1)} < 0$. g est décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (car $g(x) = \ln(\frac{x}{x-1})-\frac{1}{x} = \ln(\frac{1}{1-1/x})-\frac{1}{x}$) donc (TV) g est positive.

(g) Soit $n \geq 2$. On somme les inégalités $\frac{1}{k} \leq \ln(k)-\ln(k-1)$ pour k variant de 2 à n : $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \sum\limits_{k=2}^{n}[\ln(k)-\ln(k-1)] = ... = \ln(n)-\ln(1)$[somme télescopique] $= \ln n$.

(h) Pour $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+1$ (Chasles) $\leq \ln(n)+1$. D'où par 2.e), $\frac{1}{u_n} \leq n+1+1+\ln(n) = n+2+\ln(n)$.

(i) On a donc $n\cdot u_n \geq \frac{n}{n+2+\ln(n)}$ d'où $\frac{1}{1+2/n+\ln(n)/n} = \frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq n\cdot u_n \leq \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n}$ la deuxième inégalité venant du 2.b). Donc par encadrement, $n\cdot u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé du devoir maison 3 `inspiré d'esc E 2000`

1. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2+x+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ car le discriminant du trinôme x^2+x+1 est $\Delta = -3 < 0$.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$. Comme $-x^2+1>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$, on obtient le TV. Comme $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(c) $f(x)-x = \frac{x-x(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \frac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$. Faire alors le tableau de signe. En particulier, on trouve 2 points d'intersection -1 et 0. (d) Eq tangente : $y=x$ (puisque $f'(0)=1$ et $f(0)=0$)

2. (a) $f(\frac{1}{p}) = \frac{\frac{1}{p}}{(\frac{1}{p})^2+\frac{1}{p}+1} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1+p+p^2}{p^2}} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1+p} \leq \frac{1}{1+p}$ car $p>0$ Ou faire $\frac{1}{p+1} - f(\frac{1}{p}) = ... = \frac{1}{(p+1)(1+p+p^2)} \geq 0$.

(b) A montrer "$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$" ; *cas n=0* : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 1$. Puis, supposons que pour un certain n, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Alors, comme f est strictement croissante sur $[0,1]$ donc sur $[0, \frac{1}{n+1}]$, on obtient $f(0) < f(u_n) \leq f(\frac{1}{n+1})$. Or $f(0)=0$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\frac{1}{n+1}) \leq \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$ d'où $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$. Conclusion.

(c) Théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (d) $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+u_n+1}$ d'où $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2+u_n+1}{u_n} = u_n+1+1/u_n$.

(e) $n=1$: $\frac{1}{u_1} = u_0+1+\frac{1}{u_0} = 3$ et $1+1+\sum\limits_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = 3$. Supp $\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Mq $\frac{1}{u_{n+1}} \leq n+2+\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. Or $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n+1+\frac{1}{u_n} \leq u_n+1+(n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k})$[H.R.] $\leq \frac{1}{n+1}+1+n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ [2.b)] $= n+2+\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. Ccl.

(f) Faire l'étude de la fonction $g(x) = \ln(x)-\ln(x-1)-\frac{1}{x}$ sur $[2,+\infty[$. $g'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2(x-1)} < 0$. g est décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (car $g(x) = \ln(\frac{x}{x-1})-\frac{1}{x} = \ln(\frac{1}{1-1/x})-\frac{1}{x}$) donc (TV) g est positive.

(g) Soit $n \geq 2$. On somme les inégalités $\frac{1}{k} \leq \ln(k)-\ln(k-1)$ pour k variant de 2 à n : $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \sum\limits_{k=2}^{n}[\ln(k)-\ln(k-1)] = ... = \ln(n)-\ln(1)$[somme télescopique] $= \ln n$.

(h) Pour $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+1$ (Chasles) $\leq \ln(n)+1$. D'où par 2.e), $\frac{1}{u_n} \leq n+1+1+\ln(n) = n+2+\ln(n)$.

(i) On a donc $n\cdot u_n \geq \frac{n}{n+2+\ln(n)}$ d'où $\frac{1}{1+2/n+\ln(n)/n} = \frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq n\cdot u_n \leq \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n}$ la deuxième inégalité venant du 2.b). Donc par encadrement, $n\cdot u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.