Eléments de correction du devoir maison 5

1. $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0 \text{ et } x - 1 \neq 0\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$
2. (a) Faire un tableau de signe : $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. On trouve f_1 positive sur $\mathcal{D}$.
   (b) En 0 : pas de FI. $f_1(x) \to +\infty$ puisque $x - 1 \to -1$. Asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   En $+\infty$, (FI ∞/∞) $f_1(x) \sim \frac{\ln x}{x} \to 0$ (croissances comparées) Ou factorisation : $f_1(x) = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1-1/x}$. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
   En 1 : FI 0/0 ; posons $X = x - 1 \Leftrightarrow x = X + 1$ avec $\lim\limits_{x\to 1} X = 0$. Alors $f_1(x) = \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1+X)}{X} \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$ (limite usuelle). Donc f_1 se prolonge par continuité en 1 avec la valeur 1.
   (c) f_1 est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f_1'(x) = \frac{1/x(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$ du signe de $\varphi(x)$ car $x > 0$.
   (d) $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = ... = -\ln x$ donc φ admet un maximum en 1. Comme $\varphi(1) = 0$, φ négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (e) f_1 est décroissante sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Comme f_1 se prolonge par continuité en 1, inutile de mettre une double barre en 1 : on peut considérer f_1 décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. (a) En $+\infty$, croissances comparées , $f_k(x) \sim \frac{(\ln(x))^k}{x} \to 0$. En 0, problème du signe avec la puissance : si k pair, alors $(\ln(x))^k \to +\infty$ et $f(x) \to -\infty$, si k impair, alors $(\ln(x))^k \to -\infty$ et $f(x) \to +\infty$.
   (b) pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f_k'(x) = \frac{k\frac{1}{x}(\ln(x))^{k-1}(x-1)-(\ln(x))^k}{(x-1)^2} = \frac{(\ln(x))^{k-1}}{x(x-1)^2}(k(x-1)-x\ln x)$ du signe de $(\ln(x))^{k-1}\varphi_k(x)$.
   (c) $\forall x > 0$, $\varphi_k'(x) = k - 1 - \ln x$ d'où $\varphi_k'(x) \leq 0 \Leftrightarrow k - 1 \leq \ln x \Leftrightarrow e^{k-1} \leq x$ (exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$). φ_k admet un maximum en $x = e^{k-1}$. Limite en 0 : $-k$ et limite en $+\infty$, $\varphi_k(x) = x(k-\ln x)-k \to -\infty$. De plus, $\varphi_k(1) = 0$.
   (d) D'après le TV complet de φ_k on voit que sur $]1, e^{k-1}]$ l'équation $\varphi_k(x) = 0$ n'a aucune solution, et que sur l'intervalle, $]e^{k-1}, +\infty[$, il y en aura une unique puisque φ_k est strictement décroissante et va continument de $\varphi(e^{k-1}) > 0$ à "$-\infty$"...
   (e) Finalement, φ_k est positive sur $[1, a_k]$ et négative ailleurs. Faire alors le tableau de signe pour $(\ln(x))^{k-1}\varphi_k(x)$, qui dépend de la parité de $k - 1$ donc de la parité de k.
   (f) On sait déjà $a_k \leq e^{k-1}$. Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de regarder le signe de $\varphi_k(e^k)$.
   Or $\varphi_k(e^k) = ke^k - k - e^k(\ln(e^k)) = -k < 0 = \varphi_k(a_k)$. D'où par décroissance de φ_k sur $[e^{k-1}, +\infty[$, $a_k \leq e^k$.
   On en déduit par comparaison, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$.

Eléments de correction du devoir maison 5

1. $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0 \text{ et } x - 1 \neq 0\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$
2. (a) Faire un tableau de signe : $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. On trouve f_1 positive sur $\mathcal{D}$.
   (b) En 0 : pas de FI. $f_1(x) \to +\infty$ puisque $x - 1 \to -1$. Asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   En $+\infty$, (FI ∞/∞) $f_1(x) \sim \frac{\ln x}{x} \to 0$ (croissances comparées) Ou factorisation : $f_1(x) = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1-1/x}$. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
   En 1 : FI 0/0 ; posons $X = x - 1 \Leftrightarrow x = X + 1$ avec $\lim\limits_{x\to 1} X = 0$. Alors $f_1(x) = \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1+X)}{X} \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$ (limite usuelle). Donc f_1 se prolonge par continuité en 1 avec la valeur 1.
   (c) f_1 est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f_1'(x) = \frac{1/x(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$ du signe de $\varphi(x)$ car $x > 0$.
   (d) $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = ... = -\ln x$ donc φ admet un maximum en 1. Comme $\varphi(1) = 0$, φ négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (e) f_1 est décroissante sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Comme f_1 se prolonge par continuité en 1, inutile de mettre une double barre en 1 : on peut considérer f_1 décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. (a) En $+\infty$, croissances comparées , $f_k(x) \sim \frac{(\ln(x))^k}{x} \to 0$. En 0, problème du signe avec la puissance : si k pair, alors $(\ln(x))^k \to +\infty$ et $f(x) \to -\infty$, si k impair, alors $(\ln(x))^k \to -\infty$ et $f(x) \to +\infty$.
   (b) pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f_k'(x) = \frac{k\frac{1}{x}(\ln(x))^{k-1}(x-1)-(\ln(x))^k}{(x-1)^2} = \frac{(\ln(x))^{k-1}}{x(x-1)^2}(k(x-1)-x\ln x)$ du signe de $(\ln(x))^{k-1}\varphi_k(x)$.
   (c) $\forall x > 0$, $\varphi_k'(x) = k - 1 - \ln x$ d'où $\varphi_k'(x) \leq 0 \Leftrightarrow k - 1 \leq \ln x \Leftrightarrow e^{k-1} \leq x$ (exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$). φ_k admet un maximum en $x = e^{k-1}$. Limite en 0 : $-k$ et limite en $+\infty$, $\varphi_k(x) = x(k-\ln x)-k \to -\infty$. De plus, $\varphi_k(1) = 0$.
   (d) D'après le TV complet de φ_k on voit que sur $]1, e^{k-1}]$ l'équation $\varphi_k(x) = 0$ n'a aucune solution, et que sur l'intervalle, $]e^{k-1}, +\infty[$, il y en aura une unique puisque φ_k est strictement décroissante et va continument de $\varphi(e^{k-1}) > 0$ à "$-\infty$"...
   (e) Finalement, φ_k est positive sur $[1, a_k]$ et négative ailleurs. Faire alors le tableau de signe pour $(\ln(x))^{k-1}\varphi_k(x)$, qui dépend de la parité de $k - 1$ donc de la parité de k.
   (f) On sait déjà $a_k \leq e^{k-1}$. Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de regarder le signe de $\varphi_k(e^k)$.
   Or $\varphi_k(e^k) = ke^k - k - e^k(\ln(e^k)) = -k < 0 = \varphi_k(a_k)$. D'où par décroissance de φ_k sur $[e^{k-1}, +\infty[$, $a_k \leq e^k$.
   On en déduit par comparaison, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$.