Corrigé du devoir maison 6

1. Ω={liste de $2n$ coordonnées avec P ou F}={P,F}^{2n} et $\forall i \in [\![1,2n]\!]$, P_i (resp F_i) "le i^e lancer donne pile (resp. face)".
2. (a) $A_0 = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{2n}$
Lancers mutuellement indépendants, $P(A_0) = P(F_1) \times ... \times P(F_{2n}) = (1-p)^{2n}$
   (b) $A_1 = P_1$ et plus généralement, pour $i \in [\![1,n]\!]$, (attention, ceci veut dire que provisoirement i est fixé quelconque) $A_i = F_1 \cap ... \cap F_{i-1} \cap P_i$. Lancers indépendants : pour tout $i \in [\![1,2n]\!]$, $P(A_i) = (1-p)^{i-1}p$.
Si vous vous mélangez dans les lettres, commencer par regarder A_2, A_3 etc. pour réaliser qu'il n'y a qu'une seule issue à chaque fois ! De même, lorsque i est fixé (même si il est quelconque), A_i ne contient qu'une seule issue. Pour insister, A_2 n'est pas A_i puisque si le premier pile est arrivé au 2e lancer, c'est qu'il n'est pas arrivé au i^e. Donc A_i ... c'est A_i !!! (en revanche, réaliser que si dans l'écriture de A_i, vous remplacez i par 2, vous retombez bien sur A_2 ...).
   (c) Attention, on ne peut pas remplacer $P(A_i)$ avant d'avoir séparé le cas $i = 0$ car expressions différentes.
$\sum\limits_{i=0}^{2n} P(A_i) = P(A_0) + \sum\limits_{i=1}^{2n} P(A_i)$ (relation de Chasles) $= (1-p)^{2n} + \sum\limits_{i=1}^{2n}(1-p)^{i-1}p = (1-p)^{2n} + p\sum\limits_{j=0}^{2n-1}(1-p)^j$
$= (1-p)^{2n} + p\frac{1-(1-p)^{2n}}{1-(1-p)}$ [car $1-p \neq 1$] $= (1-p)^{2n} + 1 - (1-p)^{2n} = 1$ (puisque $1-(1-p) = p$).
Sinon, remarquer que la famille $(A_i)_{i\in[\![0,2n]\!]}$ est un s.c.e. puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles et que $\bigcup\limits_{i=0}^{2n} A_i = \Omega$ d'où (cours), $\sum\limits_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$.
3. (a) $B_2 = [P_1 \cap P_2] \cup [F_1 \cap F_2]$, $B_3 = [P_1 \cap F_2 \cap F_3] \cup [F_1 \cap P_2 \cap P_3]$ et $B_4 = [P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4] \cup [F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4]$.
Plus généralement, il y a alternance de P et F jusqu'aux deux derniers lancers, et pour savoir si quand on commence par P on finit par P ou F, il faut connaître la parité de j d'où la distinction entre $2j$ et $2j+1$.
Enfin, attention de bien respecter la convention des "...", et de mettre suffisamment d'événements !
$B_{2j} = [P_1 \cap F_2 \cap ... \cap P_{2j-3} \cap F_{2j-2} \cap P_{2j-1} \cap P_{2j}] \cup [F_1 \cap P_2 \cap ... \cap F_{2j-3} \cap P_{2j-2} \cap F_{2j-1} \cap F_{2j}]$ et
$B_{2j+1} = [F_1 \cap P_2 \cap ... \cap F_{2j-1} \cap P_{2j} \cap P_{2j+1}] \cup [P_1 \cap F_2 \cap ... \cap P_{2j-1} \cap F_{2j} \cap F_{2j+1}]$
   (b) Les lancers sont indépendants, et chaque événement B est une réunion de deux événements incompatibles, d'où $P(B_{2j}) = P(P_1)P(F_2)...P(P_{2j-1})P(P_{2j}) + P(F_1)P(P_2)...P(F_{2j-1})P(F_{2j}) = p^{j+1}(1-p)^{j-1} + (1-p)^{j+1}p^{j-1}$.
De même, $P(B_{2j+1}) = p^{j+1}(1-p)^j + p^j(1-p)^{j+1}$.

Corrigé du devoir maison 6

1. Ω={liste de $2n$ coordonnées avec P ou F}={P,F}^{2n} et $\forall i \in [\![1,2n]\!]$, P_i (resp F_i) "le i^e lancer donne pile (resp. face)".
2. (a) $A_0 = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{2n}$
Lancers mutuellement indépendants, $P(A_0) = P(F_1) \times ... \times P(F_{2n}) = (1-p)^{2n}$
   (b) $A_1 = P_1$ et plus généralement, pour $i \in [\![1,n]\!]$, (attention, ceci veut dire que provisoirement i est fixé quelconque) $A_i = F_1 \cap ... \cap F_{i-1} \cap P_i$. Lancers indépendants : pour tout $i \in [\![1,2n]\!]$, $P(A_i) = (1-p)^{i-1}p$.
Si vous vous mélangez dans les lettres, commencer par regarder A_2, A_3 etc. pour réaliser qu'il n'y a qu'une seule issue à chaque fois ! De même, lorsque i est fixé (même si il est quelconque), A_i ne contient qu'une seule issue. Pour insister, A_2 n'est pas A_i puisque si le premier pile est arrivé au 2e lancer, c'est qu'il n'est pas arrivé au i^e. Donc A_i ... c'est A_i !!! (en revanche, réaliser que si dans l'écriture de A_i, vous remplacez i par 2, vous retombez bien sur A_2 ...).
   (c) Attention, on ne peut pas remplacer $P(A_i)$ avant d'avoir séparé le cas $i = 0$ car expressions différentes.
$\sum\limits_{i=0}^{2n} P(A_i) = P(A_0) + \sum\limits_{i=1}^{2n} P(A_i)$ (relation de Chasles) $= (1-p)^{2n} + \sum\limits_{i=1}^{2n}(1-p)^{i-1}p = (1-p)^{2n} + p\sum\limits_{j=0}^{2n-1}(1-p)^j$
$= (1-p)^{2n} + p\frac{1-(1-p)^{2n}}{1-(1-p)}$ [car $1-p \neq 1$] $= (1-p)^{2n} + 1 - (1-p)^{2n} = 1$ (puisque $1-(1-p) = p$).
Sinon, remarquer que la famille $(A_i)_{i\in[\![0,2n]\!]}$ est un s.c.e. puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles et que $\bigcup\limits_{i=0}^{2n} A_i = \Omega$ d'où (cours), $\sum\limits_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$.
3. (a) $B_2 = [P_1 \cap P_2] \cup [F_1 \cap F_2]$, $B_3 = [P_1 \cap F_2 \cap F_3] \cup [F_1 \cap P_2 \cap P_3]$ et $B_4 = [P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4] \cup [F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4]$.
Plus généralement, il y a alternance de P et F jusqu'aux deux derniers lancers, et pour savoir si quand on commence par P on finit par P ou F, il faut connaître la parité de j d'où la distinction entre $2j$ et $2j+1$.
Enfin, attention de bien respecter la convention des "...", et de mettre suffisamment d'événements !
$B_{2j} = [P_1 \cap F_2 \cap ... \cap P_{2j-3} \cap F_{2j-2} \cap P_{2j-1} \cap P_{2j}] \cup [F_1 \cap P_2 \cap ... \cap F_{2j-3} \cap P_{2j-2} \cap F_{2j-1} \cap F_{2j}]$ et
$B_{2j+1} = [F_1 \cap P_2 \cap ... \cap F_{2j-1} \cap P_{2j} \cap P_{2j+1}] \cup [P_1 \cap F_2 \cap ... \cap P_{2j-1} \cap F_{2j} \cap F_{2j+1}]$
   (b) Les lancers sont indépendants, et chaque événement B est une réunion de deux événements incompatibles, d'où $P(B_{2j}) = P(P_1)P(F_2)...P(P_{2j-1})P(P_{2j}) + P(F_1)P(P_2)...P(F_{2j-1})P(F_{2j}) = p^{j+1}(1-p)^{j-1} + (1-p)^{j+1}p^{j-1}$.
De même, $P(B_{2j+1}) = p^{j+1}(1-p)^j + p^j(1-p)^{j+1}$.