Devoir à la maison 1 à rendre le mardi 10 septembre 2019

Attention de bien jouer le jeu, et de ne pas vous servir de votre ancienne calculatrice pour la représenation graphique ou pour tout autre calcul ! Car vous n'y aurez droit ni aux concours, ni à aucun DS ...

Exercice 1:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

1. Cas $n = 0$
   (a) Calculer g_0', puis dresser le tableau de variations complet de g_0 sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente en 0 puis dessiner l'allure de la courbe g_0 (tangente en 0 incluse).
2. Cas $n = 1$
   (a) Calculer g_1' puis dresser le tableau de variations de g_1 sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que le maximum de g_1 vaut $M_1 = \frac{1}{2e}$.
   (b) Déterminer la limite de $g_1(x)$ quand $x \to +\infty$. (On pourra poser $X = ...$).
3. Cas général $n \in \mathbb{N}^*$:
   (a) calculer g_n' puis dresser le tableau de variations de g_n.
   Pour trouver le signe de g_n', commencer par simplifier puis mettre en facteur du $(\ln(1+x))^{\cdots}$
   (b) Montrer que le maximum de g_n vaut $M_n = (\frac{n}{2e})^n$.

Exercice 2:

1. Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln x \leqslant x + 1$.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. (*Attention puissance réelle ! commencer par réécrire f*)
3. Calculer pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x)$ puis déterminer son signe. *Pour trouver le signe de f', commencer par chercher une forme "compacte" de f', càd une forme factorisée, mise au même dénominateur etc.*
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $\mathcal{D}$, puis vérifier que $\alpha > 1$.
6. Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in \mathcal{D}$. (*résolution ... donc raisonnement par équivalence nécessaire !*)

Devoir à la maison 1 à rendre le mardi 10 septembre 2019

Attention de bien jouer le jeu, et de ne pas vous servir de votre ancienne calculatrice pour la représenation graphique ou pour tout autre calcul ! Car vous n'y aurez droit ni aux concours, ni à aucun DS ...

Exercice 3:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

1. Cas $n = 0$
   (a) Calculer g_0', puis dresser le tableau de variations complet de g_0 sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente en 0 puis dessiner l'allure de la courbe g_0 (tangente en 0 incluse).
2. Cas $n = 1$
   (a) Calculer g_1' puis dresser le tableau de variations de g_1 sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que le maximum de g_1 vaut $M_1 = \frac{1}{2e}$.
   (b) Déterminer la limite de $g_1(x)$ quand $x \to +\infty$. (On pourra poser $X = ...$).
3. Cas général $n \in \mathbb{N}^*$:
   (a) calculer g_n' puis dresser le tableau de variations de g_n. *Pour trouver le signe de g_n', commencer par simplifier puis mettre en facteur du* $(\ln(1+x))^{\cdots}$
   (b) Montrer que le maximum de g_n vaut $M_n = (\frac{n}{2e})^n$.

Exercice 4:

1. Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln x \leqslant x + 1$.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. (*Attention puissance réelle ! commencer par réécrire f*)
3. Calculer pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x)$ puis déterminer son signe.
   Pour trouver le signe de f', commencer par chercher une forme "compacte" de f', càd une forme factorisée, mise au même dénominateur etc.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $\mathcal{D}$, puis vérifier que $\alpha > 1$.
6. Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in \mathcal{D}$. (*résolution ... donc raisonnement par équivalence nécessaire !*)