Devoir à la maison 2

à rendre le lundi 17 septembre 2019

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

I. Etude de f

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Préciser l'expression de $f(1)$ sans fraction, ainsi que l'équation de la tangente en 0.
4. Déterminer les limites de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Deviner alors les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   Interpréter graphiquement.
5. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. *(penser à raisonner par équivalence car "résolution" !)*
6. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
7. Tracer la courbe représentative de f (ce qui inclut les asymptotes et les tangentes en 0 et 1) ainsi que la droite d'équation $y = x$. On pourra utiliser que $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.

II. Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = -1$? si $u_0 = 0$?
2. On suppose ici $u_0 < -1$.
   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < -1$.
   penser à garder la lettre f pour pouvoir utiliser la partie I
   (b) Montrer alors que u est croissante.
   (c) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.
3. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.
   Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Conclure quant à la convergence de la suite u, et préciser sa limite.

Devoir à la maison 2

à rendre le lundi 17 septembre 2019

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

I. Etude de f

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Préciser l'expression de $f(1)$ sans fraction, ainsi que l'équation de la tangente en 0.
4. Déterminer les limites de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Deviner alors les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   Interpréter graphiquement.
5. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. *(penser à raisonner par équivalence car "résolution" !)*
6. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
7. Tracer la courbe représentative de f (ce qui inclut les asymptotes et les tangentes en 1 et 0) ainsi que la droite d'équation $y = x$. On pourra utiliser que $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.

II. Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = -1$? si $u_0 = 0$?
2. On suppose ici $u_0 < -1$.
   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < -1$.
   penser à garder la lettre f pour pouvoir utiliser la partie I
   (b) Montrer alors que u est croissante.
   (c) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.
3. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.
   Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Conclure quant à la convergence de la suite u et préciser sa limite.