Devoir à la maison 3

à rendre le lundi 30 septembre 2019

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Donner l'ensemble de définition de f.
   (b) Dresser son tableau de variations complet.
   (c) On note Δ la droite d'équation $y = x$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ. Préciser les points d'intersection.
   (d) Construire dans un même repère orthonormé $\mathcal{C}$ et Δ.
   On pourra au préalable préciser l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f(\frac{1}{p}) \leqslant \frac{1}{p+1}$.
   (b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (d) Vérifier que : $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$
   (e) En déduire, par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
   (f) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
   (g) En déduire que pour $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$
   (h) Montrer alors que pour $n \geq 2$, $\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.
   (i) A l'aide des résultats, précédents, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Devoir à la maison 3

à rendre le lundi 30 septembre 2019

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Donner l'ensemble de définition de f.
   (b) Dresser son tableau de variations complet.
   (c) On note Δ la droite d'équation $y = x$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ. Préciser les points d'intersection.
   (d) Construire dans un même repère orthonormé $\mathcal{C}$ et Δ.
   On pourra au préalable préciser l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f(\frac{1}{p}) \leqslant \frac{1}{p+1}$.
   (b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (d) Vérifier que : $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$
   (e) En déduire, par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
   (f) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
   (g) En déduire que pour $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$
   (h) Montrer alors que pour $n \geq 2$, $\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.
   (i) A l'aide des résultats, précédents, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.