Devoir à la maison 5 à rendre le lundi 4 novembre 2019

Le but de cet exercice est d'étudier la famille des fonctions f_k définies par $f_k(x) = \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ des fonctions f_k.
2. Cas $k = 1$: $f_1 : x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$.
   (a) Donner le signe de f_1 sur $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
   La fonction f_1 se prolonge-t-elle par continuité en 1 ?
   (c) Justifier que f_1 est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
   (d) On introduit $\varphi : x \mapsto x - 1 - x\ln x$. Dresser le tableau de variations complet de φ sur $]0, +\infty[$.
   (e) En déduire le tableau de variations complet de f_1 sur $\mathcal{D}$.
   (f) Représenter graphiquement l'allure de f_1 sur $\mathcal{D}$.
3. Cas $k \geq 2$: $f_k : x \mapsto \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$
   (a) Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$. *On distinguera deux cas selon k.*
   (b) Calculer $f_k'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
   (c) On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln x$.
   Dresser le tableau de variations complet de φ_k. On pourra préciser la valeur de $\varphi_k(1)$.
   (d) Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$. On la notera a_k.
   (e) En distinguant deux cas selon k, dresser le tableau de variations complet de f_k sur $\mathcal{D}$.
   (f) Montrer alors que pour tout $k \geq 2$, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$. Qu'en déduit-on sur la limite de a_k ?

Pour ceux qui veulent en faire plus : (les corrigés sont en ligne)
— du calcul, encore du calcul : par exemple exercice 3 DM 3 année 2017-18
— des polynômes : exercice 2 DM 4 année 2 2017-18

Devoir à la maison 5 à rendre le lundi 4 novembre 2019

Le but de cet exercice est d'étudier la famille des fonctions f_k définies par $f_k(x) = \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ des fonctions f_k.
2. Cas $k = 1$: $f_1 : x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$.
   (a) Donner le signe de f_1 sur $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
   La fonction f_1 se prolonge-t-elle par continuité en 1 ?
   (c) Justifier que f_1 est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
   (d) On introduit $\varphi : x \mapsto x - 1 - x\ln x$. Dresser le tableau de variations complet de φ sur $]0, +\infty[$.
   (e) En déduire le tableau de variations complet de f_1 sur $\mathcal{D}$.
   (f) Représenter graphiquement l'allure de f_1 sur $\mathcal{D}$.
3. Cas $k \geq 2$: $f_k : x \mapsto \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$
   (a) Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$. *On distinguera deux cas selon k.*
   (b) Calculer $f_k'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
   (c) On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln x$.
   Dresser le tableau de variations complet de φ_k. On pourra préciser la valeur de $\varphi_k(1)$.
   (d) Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$. On la notera a_k.
   (e) En distinguant deux cas selon k, dresser le tableau de variations complet de f_k sur $\mathcal{D}$.
   (f) Montrer alors que pour tout $k \geq 2$, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$. Qu'en déduit-on sur la limite de a_k ?

Pour ceux qui veulent en faire plus : (les corrigés sont en ligne)
— du calcul, encore du calcul : par exemple exercice 3 DM 3 année 2017-18
— des polynômes : exercice 2 DM 4 année 2 2017-18