Corrigé du devoir maison 1

Exercice 1 :

1. Erreur récurrente : confusion entre l'ensemble de définition (càd l'ensemble des x où tous les termes de l'équation existent) et l'ensemble des x où l'équation peut avoir des solutions. Pour insister : $\{x \in \mathbb{R}/x+1 \geq 0 \text{ et } 3x+1 \geq 0\}$ n'est pas l'ensemble de définition. C'est une confusion de deux ensembles distincts.

   Corrigé : Equation définie sur $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}/x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$. Puis deux rédactions possibles :
   Analyse : supposons qu'une telle solution $x \in [-1, +\infty[$ existe. Alors $\sqrt{x+1} = 3x+1 \Rightarrow x+1 = (3x+1)^2$
   $\Rightarrow 9x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(9x+5) = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-1, +\infty[$ ou $x = -\frac{5}{9} \in [-1, +\infty[$.
   Il y a donc deux candidats à cette équation.
   Synthèse : on vérifie si les candidats sont solutions. $\sqrt{0+1} = 1 = 3\times 0+1$ mais $\sqrt{-\frac{5}{9}+1} = \frac{2}{3} \neq 3\times(-\frac{5}{9})+1 = -\frac{2}{3}$.
   Conclusion : cette équation admet une unique solution $x = 0$.
   Rédaction par équivalences, à privilégier à terme : (brouillon $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/3$)
   Sur $[-1, -1/3[$, $\sqrt{x+1} \geq 0$ et $3x+1 < 0$. L'équation n'admet aucune solution.
   Sur $[-1/3, +\infty[$, comme les deux membres sont positifs, on a l'équivalence $\sqrt{x+1} = 3x+1 \Leftrightarrow x+1 = (3x+1)^2$
   $\Leftrightarrow 9x^2+5x = 0 \Leftrightarrow x(9x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-\frac{1}{3}, +\infty[$ ou $x = -\frac{5}{9} \notin [-1/3, +\infty[$. Ccl : $\mathcal{S} = \{0\}$.

2. Inéquation définie sur $\mathbb{R}$. Comme la formule du cours $|y| \leq b$ différencie $b \geq 0$ et $b < 0$, il faut séparer deux cas.
   Si $x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2 > x$, on a $x-2 < 0$ et $|x^2-3x| \geq 0$ donc l'inéquation est impossible : pas de solutions sur l'intervalle $]-\infty, 2[$ (mais attention, l'inéquation existe sur cet intervalle !).
   Sur$[2, +\infty[$, comme $x-2 \geq 0$, on obtient (cf cours) $|x^2-3x| \leq x-2 \Leftrightarrow -(x-2) \leq x^2-3x \leq x-2$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x \leq x-2 \text{ et} \\ -x+2 \leq x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2 \leq 0 \\ 0 \leq x^2-2x-2 \end{cases}$ ... (calculs de Δ etc. cf ci-dessous) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, 2+\sqrt{2}] \\ x \in [1+\sqrt{3}, +\infty[\end{cases}$ En effet, on est dans le cas $\boxed{x \in [2, +\infty[}$. De plus $2 < 1+\sqrt{3} < 2+\sqrt{2}$, donc
   Conclusion : l'ensemble solution est $\mathcal{S} = [1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{2}]$
   Calculs : $\Delta_1 = 8$, $\sqrt{\Delta_1} = 2\sqrt{2}$ d'où deux racines $r_1 = 2-\sqrt{2} < 2$ et $r_2 = 2+\sqrt{2} \geq 2$.
   $\Delta_2 = 12$ donc$\sqrt{\Delta_2} = 2\sqrt{3}$; deux racines $x_1 = 1-\sqrt{3} < 2$ et $x_2 = 1+\sqrt{3} \geq 1+\sqrt{1} = 2$.
   Enfin, $1+\sqrt{3} \leq 1+\sqrt{4} = 3 = 2+\sqrt{1} \leq 2+\sqrt{2}$.

Exercice 2 :

1. (a) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1-x > 0 \text{ et } x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0\} =]0, 1[$.
   (b) comme $x \in]0,1[$, $\ln x < 0$ et comme $x \in]0,1[$, $1-x \in]0,1[$ et $\ln(1-x) < 0$.
   Par quotient $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
   (c) par compositions, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
   De même $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0^-$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ (pas de F.I. ! !)
   Asymptote verticale d'équation $x = 1$.
   (d) f est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{1-x}\ln x - \frac{1}{x}\ln(1-x)}{(\ln x)^2}$. Il reste à mettre le numérateur au même dénominateur puis à utiliser la formule $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$.
   (f) $\forall t \in]0,1[$, $t > 0$ et $\ln t < 0$ donc $t \ln t < 0$ donc en prenant $t = x$ puis $t = 1-x$, on obtient $-x\ln x > 0$ et $-(1-x)\ln(1-x) > 0$. Par somme, le numérateur est strictement positif, et par quotient $f'(x) > 0$.

2. (a) (E_1) : $x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$ donc unique solution $\frac{1}{2}$.
   (E_2) : $x^2 + x - 1 = 0$. Alors $\Delta = 5$ et deux racines : $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Or $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 0$: unique solution $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Soit $n \geq 1$. Poser $g_n : x \mapsto x^n + x - 1$ sur $\mathbb{R}^+$. TV etc... Alors g_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc g_n prend une et une seule fois toutes les valeurs de $[g_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)[= [-1, +\infty[$. Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $g_n(x) = 0$ (càd (E_n)) admet bien une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) En réutilisant g_n : on a $g_n(0) = -1 < 0$ et $g_n(1) = 1 > 0$ Donc par stricte croissante de g_n sur $\mathbb{R}^+$, on a bien $0 < x_n < 1$.
   (d) x_n étant solution de (E_n), on a $(x_n)^n + x_n - 1 = 0 \Leftrightarrow (x_n)^n = 1 - x_n \Leftrightarrow \ln((x_n)^n) = \ln(1-x_n)$ (par bijectivité du ln sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou pour l'instant, par stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow n\ln(x_n) = \ln(1-x_n) \Leftrightarrow \frac{\ln(1-x_n)}{\ln(x_n)} = n$ (puisque $x_n \neq 1$ donc $\ln(x_n) \neq 0$). D'où le résultat.
   Variante : partir de l'équation $f(x) = n$ .... et retomber (via des équivalences) sur (E_n). Donc x_n étant solution de l'une, est solution de l'autre !.
   (e) On a donc $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$. Comme $n+1 > n$, on en déduit $f(x_{n+1}) > f(x_n)$ et vu la stricte croissance de f, on obtient (cf TV), $x_{n+1} > x_n$.
   (f) La suite (x_n) est croissante d'après le (e), et majorée par 1 d'après le (c) : elle est donc convergente !