

# Eléments de correction du devoir maison 10

## Exercice 1: Intégrales de Wallis (Exercice 12 Feuille 12) fréquemment posé aux concours

- $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$  et  $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\cos t - 1) dt \leq 0$ . En effet,  $0 < \frac{\pi}{2}$ , et pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $1 \geq \cos t \geq 0$  donc  $(\cos t)^n \geq 0$  et  $\cos t - 1 \leq 0$ .

De plus, pour les mêmes raisons que ci-dessus, on obtient que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \geq 0$ .  
Donc la suite  $(W_n)$ , décroissante et minorée par 0, converge.

- IPP sur  $W_{n+2}$ . Premières tentatives :  $u' = 1$  et  $v = (\cos t)^{n+2}$  ou  $u' = (\cos t)^2$  et  $v = (\cos t)^n$  Ne marchent pas. Astuce : écrire  $(\cos t)^{n+2} = \cos t (\cos t)^{n+1}$  et poser  $u' = \cos t$  et  $v = (\cos t)^{n+1}$ .

Alors  $u = \sin t$  et  $v' = -(n+1)(\sin t)(\cos t)^n$ .  $u, v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  d'où

$$W_{n+2} = [(\cos t)^{n+1} \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^n dt = 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\cos t)^2) (\cos t)^n dt$$

$$= (n+1) [\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (\cos t)^n dt] = (n+1) [W_n - W_{n+2}].$$

D'où  $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$  càd  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .

Finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ .

- \*\* Par récurrence :  $n = 0 : \frac{0!}{(1 \cdot 0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$ .

Supposons que pour un certain  $n$ ,  $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$  et montrons que  $W_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1} (n+1)!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} (n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Or } W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \text{ par 2.} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ par H.R.} = \frac{(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(2(n+1))^2 (2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} (n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Ou par itération ... en partant de la formule du 2. en  $W_{2n}$  (donc fonction de  $W_{2n-2}$ ), et en itérant jusqu'à  $W_0$ .

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}$  par 2. =  $u_n$ . Donc la suite  $(u_n)$  est constante.

Or  $u_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$  et finalement pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_n = \frac{\pi}{2}$ .

- Par 4. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$  d'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2}$  et

$$W_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{W_{2n}} \frac{\pi}{2} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \frac{\pi}{2}$$

## Exercice 2:

Posons  $f$  l'intégrande :  $f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ , définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .

- si  $x > 0$ , alors  $3x > 0$  donc  $[x, 3x] \subset ]0, +\infty[$  (ou dire donc  $0 \notin [x, 3x]$ ) et  $f$  est bien continue sur  $[x, 3x]$  donc  $F(x)$  existe.

si  $x < 0$ , alors  $3x < 0$  donc  $[x, 3x] \subset ]-\infty, 0[$  ( $0 \notin [3x, x]$ ) et  $f$  est bien continue sur  $[3x, x]$  donc  $F(x)$  existe.  
 $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

- $\forall x \in \mathbb{R}^*$ , on a bien  $-x \in \mathbb{R}^*$  et  $F(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ . Changement de variable :  $y = -t$  ( $t \mapsto -t$   $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ).

$$\text{Alors } t = -y, dt = -dy \text{ et } t = -x \Rightarrow y = x \text{ et } t = -3x \Rightarrow y = 3x \text{ d'où } F(-x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(-y)}{-y} (-dy)$$

$$= \int_x^{3x} \frac{\cos(-y)}{y} dy = \int_x^{3x} \frac{\cos(y)}{y} dy = F(x) \text{ par parité du cosinus. Donc } F \text{ est paire sur } \mathbb{R}^*.$$

- (a) Pour tout  $x > 0$ , d'après l'inégalité triangulaire car  $3x > x$ ,

$$|\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt| \leq \int_x^{3x} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt = \int_x^{3x} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt \text{ par croissance de l'intégrale, puisque pour tout } t \in \mathbb{R},$$

$$|\sin(t)| \leq 1. \text{ Or } \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt = [-\frac{1}{t}]_x^{3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{3x} \text{ d'où le résultat.}$$

- (b) Soit  $x > 0$ . Intégration par parties : posons  $u'(t) = \cos(t)$ ,  $u(t) = \sin(t)$ ,  $v(t) = \frac{1}{t}$  et  $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$ .  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[x, 3x]$  et  $F(x) = [\frac{\sin t}{t}]_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ .

- (c)  $\frac{2}{3x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc en appliquant le théorème d'encadrement au résultat du (a), on obtient  $\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

De plus,  $|\frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{x}| \leq \frac{|\sin(3x)| + 3|\sin(x)|}{x} \leq \frac{4}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

- (a) Soit  $x \in ]0, \frac{\pi}{6}[$ , alors  $3x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\cos$  étant une fonction décroissante sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , elle l'est sur  $[x, 3x]$ . D'où par construction :  $x \leq t \leq 3x \Rightarrow \cos(3x) \leq \cos(t) \leq \cos(x) \Rightarrow \frac{\cos(3x)}{t} \leq \frac{\cos(t)}{t} \leq \frac{\cos(x)}{t}$  [car  $t > 0$ ] et par croissance de l'intégrale, comme  $3x > x$  puisque  $x > 0$ ,  $\int_x^{3x} \frac{\cos(3x)}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{\cos(x)}{t} dt$

Or par linéarité,  $\int_x^{3x} \frac{\cos(x)}{t} dt = \cos(x) \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt = \cos(x) [\ln(|t|)]_x^{3x} = \cos(x) (\ln(3x) - \ln(x)) = \cos(x) \ln(3)$ . De même,  $\int_x^{3x} \frac{\cos(3x)}{t} dt = \cos(3x) \ln(3)$ . d'où  $\cos(x) \ln(3) \leq F(x) \leq \cos(x) \ln(3)$ .

- (b) Théorème d'encadrement appliqué au (a) :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \ln(3)$ .

Comme  $F$  est paire sur  $\mathbb{R}^*$ , on en déduit :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \ln(3)$  donc finalement,  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$  existe et  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \ln(3) \in \mathbb{R}$ . Donc  $F$  se prolonge par continuité en 0 (avec la valeur  $\ln(3)$ ).