Corrigé de l'exercice à rendre du devoir maison 11

1. (a) cf 2. (a)
   (b) $(1, X, X^2)$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, d'où $Im(\Phi) = Vect(\Phi(1), \Phi(X), \Phi(X^2)) = Vect(0, 3X, 8X^2 - 2)$ $= Vect(3X, 8X^2 - 2)$. La famille $(3X, 8X^2 - 2)$, génératrice de $Im(f)$ est de plus libre car formée de polynômes non-nuls de degrés distincts, donc est une base de $Im(\Phi)$.
   Comme une base de $Im(\Phi)$ ne contient que deux vecteurs, contrairement à la base canonique de l'espace d'arrivée qui en contient trois, $Im(\Phi) \subsetneq \mathbb{R}_2[X]$ donc Φ n'est pas surjective. On aurait aussi pu montrer que $1 \notin Im(\Phi)$ en montrant que l'équation $\Phi(P) = 1$ avec $P(X) = aX^2 + bX + c$, n'a pas de solution ....

   (c) Posons $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $\Phi(P) = 3X(2aX + b) + (X^2 - 1)(2a) = 8aX^2 + 3bX - 2a$. Alors $P \in Ker(\Phi) \Leftrightarrow \left\{ a = b = 0 \right. \Leftrightarrow P(X) = c$. Finalement, $Ker(\Phi) = \{P(X) = c, c \in \mathbb{R}\} = Vect(1)$. La famille (1) est de plus libre (un seul vecteur non nul), donc est une base de $Ker(\Phi)$.
   Comme $Ker(\Phi) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$, Φ n'est pas injective.
2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $deg(P) \leq n$. Alors $deg(3XP') = 1 + deg(P') \leq 1 + (n - 1) = n$ et de même, $deg((X^2 - 1)P'') = 2 + deg(P'') \leq 2 + (n - 2) \leq n$, donc par somme, $deg(\Phi(P)) \leq n$ et $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Linéarité : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\Phi(\lambda P + Q) = 3X(\lambda P + Q)' + (X^2 - 1)(\lambda P + Q)''$ et par linéarité de la dérivation, $= 3X(\lambda P' + Q') + (X^2 - 1)(\lambda P'' + Q'') = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$.

   (b) On a déjà calculé $\Phi(1) = 0$, et $\Phi(X) = 3X$. Pour $k \geq 2$, $\Phi(X^k) = 3X(kX^{k-1}) + (X^2 - 1)(k(k - 1)X^{k-2})$
   Attention, prenez le temps de bien écrire la forme canonique de $\Phi(X^k)$, car cette écriture de $\Phi(X^k)$ ne permet pas de bien identifier le degré (or il le faudra ...). Donc développez et triez les puissances.
   On trouve $\Phi(X^k) = k(k + 2)X^k - k(k - 1)X^{k-2}$.

   (c) Même raisonnement qu'au 2.(a) : $Im(\Phi) = Vect(\Phi(1), \Phi(X), ..., \Phi(X^k), ..., \Phi(X^n))$; on enlève le $0(=\Phi(1))$, et il reste une famille de polynômes non-nuls échelonnée en degrés donc libre. En effet, vu la forme canonique obtenue au (b), pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $deg(\Phi(X^k)) = k$, puisque $k(k + 2) \neq 0$.
   Donc la famille $(3X, ..., k(k+2)X^k - k(k-1)X^{k-2}, ..., n(n+2)X^n - n(n-1)X^{n-2})$ forme une base de $Im(\Phi)$ (il y a n vecteurs dans cette famille).

   (d) On a vu que $\Phi(1) = 0$, donc $1 \in Ker(\Phi)$ (et 1 est bien un vecteur non-nul !)

Corrigé de l'exercice à rendre du devoir maison 11

1. (a) cf 2. (a)
   (b) $(1, X, X^2)$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, d'où $Im(\Phi) = Vect(\Phi(1), \Phi(X), \Phi(X^2)) = Vect(0, 3X, 8X^2 - 2)$ $= Vect(3X, 8X^2 - 2)$. La famille $(3X, 8X^2 - 2)$, génératrice de $Im(f)$ est de plus libre car formée de polynômes non-nuls de degrés distincts, donc est une base de $Im(\Phi)$.
   Comme une base de $Im(\Phi)$ ne contient que deux vecteurs, contrairement à la base canonique de l'espace d'arrivée qui en contient trois, $Im(\Phi) \subsetneq \mathbb{R}_2[X]$ donc Φ n'est pas surjective. On aurait aussi pu montrer que $1 \notin Im(\Phi)$ en montrant que l'équation $\Phi(P) = 1$ avec $P(X) = aX^2 + bX + c$, n'a pas de solution ....

   (c) Posons $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $\Phi(P) = 3X(2aX + b) + (X^2 - 1)(2a) = 8aX^2 + 3bX - 2a$. Alors $P \in Ker(\Phi) \Leftrightarrow \left\{ a = b = 0 \right. \Leftrightarrow P(X) = c$. Finalement, $Ker(\Phi) = \{P(X) = c, c \in \mathbb{R}\} = Vect(1)$. La famille (1) est de plus libre (un seul vecteur non nul), donc est une base de $Ker(\Phi)$.
   Comme $Ker(\Phi) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$, Φ n'est pas injective.
2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $deg(P) \leq n$. Alors $deg(3XP') = 1 + deg(P') \leq 1 + (n - 1) = n$ et de même, $deg((X^2 - 1)P'') = 2 + deg(P'') \leq 2 + (n - 2) \leq n$, donc par somme, $deg(\Phi(P)) \leq n$ et $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Linéarité : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\Phi(\lambda P + Q) = 3X(\lambda P + Q)' + (X^2 - 1)(\lambda P + Q)''$ et par linéarité de la dérivation, $= 3X(\lambda P' + Q') + (X^2 - 1)(\lambda P'' + Q'') = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$.

   (b) On a déjà calculé $\Phi(1) = 0$, et $\Phi(X) = 3X$. Pour $k \geq 2$, $\Phi(X^k) = 3X(kX^{k-1}) + (X^2 - 1)(k(k - 1)X^{k-2})$
   Attention, prenez le temps de bien écrire la forme canonique de $\Phi(X^k)$, car cette écriture de $\Phi(X^k)$ ne permet pas de bien identifier le degré (or il le faudra ...). Donc développez et triez les puissances.
   On trouve $\Phi(X^k) = k(k + 2)X^k - k(k - 1)X^{k-2}$.

   (c) Même raisonnement qu'au 2.(a) : $Im(\Phi) = Vect(\Phi(1), \Phi(X), ..., \Phi(X^k), ..., \Phi(X^n))$; on enlève le $0(=\Phi(1))$, et il reste une famille de polynômes non-nuls échelonnée en degrés donc libre. En effet, vu la forme canonique obtenue au (b), pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $deg(\Phi(X^k)) = k$, puisque $k(k + 2) \neq 0$.
   Donc la famille $(3X, ..., k(k+2)X^k - k(k-1)X^{k-2}, ..., n(n+2)X^n - n(n-1)X^{n-2})$ forme une base de $Im(\Phi)$ (il y a n vecteurs dans cette famille).

   (d) On a vu que $\Phi(1) = 0$, donc $1 \in Ker(\Phi)$ (et 1 est bien un vecteur non-nul !)