Corrigé du travail libre du DM 11

Fonctions et calcul

1. g dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2} \leq 0$.
   g décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \leq 0$.
2. Petite FI sur le terme $\frac{x}{1+x}$. Factoriser par le prépondérant : $g(x) = \frac{1}{1+1/x} - \ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions usuelles dérivables sur leur ensemble de définition et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x} = e^{-x}(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)) = e^{-x}g(e^x)$.
   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \in \mathbb{R}^+$, et pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $g(y) \leq 0$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(e^x) \leq 0$ et $f'(x) \leq 0$.
4. En $-\infty$: poser $X = e^x \to 0$, alors $f(x) = \frac{1}{X}\ln(1+X) \underset{X\to0}{\longrightarrow} 1$ (limite usuelle). Ou par les équivalents usuels : comme $e^x \to 0$, $\ln(1+e^x) \underset{x\to-\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} e^{-x}e^x = 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$. Asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
   En $+\infty$, factorisation par le prépondérant : $f(x) = e^{-x}\ln(e^x(e^{-x}+1)) = e^{-x}(\ln(e^x) + \ln(e^{-x}+1)) = xe^{-x} + e^{-x}\ln(e^{-x}+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées (pour le premier terme, et pas de FI dans le second). Ou faire le même changement de variable $X = e^x \to +\infty$... (se ramener de toute façon aux croissances comparées).
5. f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]0,1[$.
   Donc (toujours d'après le théorème de la bijection), $f^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$ est bijective et strictement décroissante. En particulier, on en déduit que $\lim_{y\to0} f^{-1}(y) = +\infty$ et $\lim_{y\to1} f^{-1}(y) = -\infty$.
6. On pose $h(x) = f(x) - x$. Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x) - 1 < -1 < 0$. Donc h continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (Attention de bien recalculer les limites de h : il n'y a pas de FI, une fois que l'on s'appuie sur les limites de f trouvées précédemment) En particulier, comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ (par définition de la bijection). On a donc $\alpha = f(\alpha) \in]0,1[$ (vu les valeurs prises par f). Ou sinon, vérifier $h(0) > 0$ et $h(1) < 0$ ...

Matrices et applications linéaires :

1. (b) Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda I + \mu A + \nu A^2 = 0_3$. Alors $\begin{pmatrix} \lambda+\nu & \mu & \nu \\ \dots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dots & & \end{pmatrix} \Leftrightarrow \nu = \mu = \lambda = 0$.
2. (a) Montrer tout d'un coup ! (inutile de passer par la méthode des 3 points) : $\mathcal{E} = \{aI + bA + cA^2, a, b, c \in \mathbb{R}\} = Vect(I, A, A^2)$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et (I, A, A^2) en est une famille génératrice. Comme elle est libre (1.(b)), c'est une base de $\mathcal{E}$.
   (b) Poser $M = aI + bA + cA^2 \in \mathcal{E}$. Alors $AM = aA + bA^2 + cA^3 = (2c+a)A + bA^2 \in \mathcal{E}$ (ou poser M sous forme de tableau, et faire le calcul de AM à la main)
3. (a) D'après 2.(b), $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ donc il suffit de montrer que f est linéaire. Or soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $M, N \in \mathcal{E}$. Alors $f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$.
   (b) $\forall M \in \mathcal{E}$, $f \circ f \circ f(M) = f \circ f(AM) = f(A^2M) = A^3M = 2AM = 2f(M)$ d'où $f \circ f \circ f = 2f$.
   (c) (I, A, A^2) base de $\mathcal{E}$ (attention de ne pas prendre une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou je ne sais quoi d'autre), donc $Im(f) = Vect(f(I), f(A), f(A^2)) = Vect(A, A^2, A^3) = Vect(A, A^2, 2A) = Vect(A, A^2)$. Donc (A, A^2) génératrice et libre (comme sous-famille de famille libre cf 1.(b)) donc base de $Im(f)$.
   Puis soit $M \in \mathcal{E}$. $f(M) = 0 \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow (2c+a)A + bA^2 = 0$ (reprendre le calcul du 2.(b)) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
   car (A, A^2) famille libre (ou revenir à l'identification des coefficients, en écrivant toutes les matrices sous forme de tableau). Finalement $Kerf = \{-2cI + cA^2, c \in \mathbb{R}\} = Vect(-2I + A^2) = Vect(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix})$.Famille libre car un seul vecteur non nul.
   Puis f n'est pas injective car $Ker(f) \neq \{O_3\}$ et pas surjective car $Im(f) \subsetneq \mathcal{E}$ (pour justifier ce dernier résultat, on verra dans le prochain chapitre un "vrai" argument : pour l'instant, cela me suffit que vous le visualisiez, voire que vous comptiez le nombre de vecteurs dans une base .... ici une base de $Im(f)$ compte 2 vecteurs, alors qu'une base de $\mathcal{E}$ en compte 3 !)
4. Soit $M = aI + bA + cA^2 \in \mathcal{E}$. Alors $AM = I + A^2 \Leftrightarrow (2c+a)A + bA^2 = I + A^2$
   $\Leftrightarrow -I + (2c+a)A + (b-1)A^2 = 0_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0 \\ 2c + a = 0, \quad b - 1 = 0 \end{cases}$ car (I, A, A^2) est une famille libre.
   Ou écrire tout sous forme de tableaux.
   ccl : $\mathcal{S} = \varnothing$

Pour aller plus loin

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $u(\lambda P + Q) = (\lambda P(a) + Q(a), \lambda P(b) + Q(b), \lambda P(c) + Q(c))$
$= \lambda(P(a), P(b), P(c)) + (Q(a), Q(b), Q(c)) = \lambda u(P) + u(Q)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $P \in Ker(u) \Leftrightarrow u(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow P(a) = 0 = P(b) = P(c) \Leftrightarrow a, b, c$ sont 3 racines distinctes de $P \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car $deg(P) \leq 2$. Donc $Ker(u) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ et u est injective.
3. $Im(u) = Vect(u(1), u(X), u(X^2)) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4))$
$= Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,0,1))$ car $\frac{1}{2}((0,1,4) - (0,1,2)) = (0,0,1)$
$= Vect(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$ car $(0,1,2) - 2*(0,0,1) = (0,1,0)$
$= Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$ car $(1,1,1) - (0,1,0) - (0,0,1) = (1,0,0)$ donc u est surjective.
OU via la compatibilité d'un système (ne pas aller jusqu'à la résolution !!), pour mq que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe bien $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u(P) = (x,y,z)$ (définition de la surjection, que l'application soit linéaire ou non).
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Mq il existe $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que
$\begin{cases} P(0) = x \\ P(1) = y \\ P(2) = z \end{cases}$. Or $\begin{cases} \gamma & = x \\ \alpha + \beta + \gamma & = y \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = y \\ -2\beta - 3\gamma & = z - 4y \\ \gamma & = x \end{cases}$ système compatible car de Cramer.
4. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange (cf DM 4).
a) Analyse : soit A un polynôme qui convient. Alors A est de degré au plus 2, et b et c sont deux racines distinctes, donc $(X-b)(X-c)$ divise A et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A(X) = (X-b)(X-c)Q(X)$. Or $deg(A) \leq 2 \Rightarrow deg(Q) \leq 0$ d'où $Q(X) = \alpha \in \mathbb{R}$ et $A(X) = \alpha(X-b)(X-c)$. Puis $A(a) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$.
Un unique candidat : $A(X) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}(X-b)(X-c)$.
Synthèse immédiate : ce polynôme convient bien car $A \in \mathbb{R}_2[X]$, $A(a) = 1$ et $A(b) = 0 = A(c)$.
b) De même, on trouve $B(X) = \frac{1}{(b-a)(b-c)}(X-a)(X-c)$ et $C(X) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}(X-a)(X-c)$.
5. a) Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda A(X) + \mu B(X) + \nu C(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. D'habitude, dans les polynômes, on écrit tout sous forme canonique puis on identifie les coefficients ... pour trouver finalement $\lambda = \mu = \nu = 0$. Ici, on a A, B, C sous forme factorisée donc c'est long. Astuce : on utilise le même raisonnement que pour les familles libres de fonctions. On a 3 inconnues, donc 3 "bonnes" équations suffisent.
En $X = a$ on obtient : $\lambda A(a) + \mu B(a) + \nu C(a) = 0$ càd $\lambda = 0$.
De même, en $X = b$ puis en $X = c$, on trouve $\mu = 0 = \nu$.
b) Trouvons les (uniques) (α, β, γ) tels que $P(X) = \alpha A(X) + \beta B(X) + \gamma C(X)$. Même astuce : 3 inconnues, donc il faut 3 équations : on regarde en $X = a$, puis $X = b$ et $X = c$. On trouve $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$ et $\gamma = P(c)$.
Finalement tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ s'écrit $P(X) = P(a)A(X) + P(b)B(X) + P(c)C(X)$.

Matrices et probabilités

1. Question calculatoire ... mais ca finit par sortir si l'on n'oublie pas l'hypothèse $p + q = 1$!
2. D'après l'énoncé, à l'étape 0, deux boules noires sont placées sur la table donc $P(X_0 = 0) = 1$ et $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 0$. Puis une boule noire est enlevée. On note alors B_1 l'événement "on repose une boule blanche à l'étape 1". Alors $P(X_1 = 0) = P(\overline{B_1}) = q$, $P(X_1 = 1) = P(B_1) = p$ et $P(X_1 = 2) = 0$ car on ne change qu'une boule sur les deux, donc il reste forcément au moins une boule noire sur la table.
3. Sachant $(X_k = 0)$, deux boules noires sont posées sur la table donc au début de l'étape $k+1$, une boule noire a été enlevée, et donc $(X_{k+1} = 0)$ est réalisée ssi une boule noire est reposée : d'où $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = q$, et $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 1) = p$, $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 2) = 0$.
Sachant $X_k = 2$, deux boules blanches sont posées sur la table donc au début de l'étape $k+1$, une boule blanche a été enlevée, et donc $(X_{k+1} = 2)$ est réalisée ssi une boule blanche est reposée etc. : $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2) = p$, et $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = q$, $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 0) = 0$.
Sachant $(X_k = 1)$, il y a une boule blanche et une noire sur la table. Pour que $(X_{k+1} = 0)$ soit réalisé, il faut que la boule noire soit retirée (une chance sur deux), et qu'une boule blanche soit posée : $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 0) = \frac{1}{2}q$ et par symétrie, $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{2}p$.
Dans ces conditions, $(X_{k+1} = 1)$ est réalisé dans deux cas incompatibles : on enlève une blanche, et on repose une blanche ou l'on enlève une noire et on repose une noire : $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$ (ou faire 1- ...).
4. $\{(X_k = 0), (X_k = 1), (X_k = 2)\}$ forme un s.c.e.. D'après la formule des probabilités totales, $P((X_{k+1} = 0))$
$= P(X_k = 0)P_{(X_k=0)}((X_{k+1} = 0) + P(X_k = 1)P_{(X_k=1)}((X_{k+1} = 0) + P(X_k = 2)P_{(X_k=2)}((X_{k+1} = 0)$
$= qP(X = 0) + \frac{1}{2}qP(X_k = 1)$ et de même, on trouve
$P(X_{k+1} = 1) = pP(X_k = 0) + \frac{1}{2}P(X_k = 1) + qP(X_k = 2)$, $P(X_{k+1} = 2) = \frac{p}{2}P(X_k = 1) + pP(X_k = 2)$.
Il reste à faire le produit matriciel MU_k pour constater qu'on trouve U_{k+1}.
5. Raisonnement par récurrence :
n=1 : ne pas oublier que le calcul PD a déjà été fait ! et penser à réutiliser $p + q = 1$.
Supposons que pour un certain k,
$U_k = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $U_{k+1} = MU_k = MPD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = PDD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$ (par 1.) $= PD^{k+1} \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Comme D est une matrice diagonale, et que pour tout $k \geq 1$, $0^k = 0$, on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$U_k = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p(\frac{1}{2})^{k-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$
Et on en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_k = 0) = pq(\frac{1}{2})^{k-1} + q^2$, $P(X_k = 1) = p(p-q)(\frac{1}{2})^{k-1} + 2pq$ et $P(X_k = 2) = -p^2(\frac{1}{2})^{k-1} + p^2$.
Comme $\frac{1}{2} \in]0,1[$, on trouve $\lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = 0) = q^2$, $\lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = 1) = 2pq$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = 2) = p^2$.

Intégration

1. Posons $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle $[x, 2x]$, avec $x \in \mathbb{R}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$. (En effet, $f(x)$ existe si g est continue sur $[x, 2x]$)
2. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}}$ et $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$. Posons $u = -t$, avec $t \mapsto -t$ C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors $du = -dt$, et $t = -x \Rightarrow u = x$, $t = -2x \Rightarrow u = 2x$. D'où $f(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-du) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du = -f(x)$.
f est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. Posons G une primitive de g sur $\mathbb{R}$ (G existe car g continue sur $\mathbb{R}$) : en particulier G est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $G' = g$. Alors par définition de l'intégrale $f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$, d'où f est C^1 comme somme et composée de fonctions C^1 et $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{4x^2+4} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}} > 0$.
4. (a) Pour tout $t > 0$, $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$ d'où $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{t^2+1} \geq \frac{1}{(t+1)^2}$ et $\frac{1}{t} \geq g(t) \geq \frac{1}{t+1}$ (car $t > 0$).
Donc $\boxed{\text{pour } x > 0, \text{ comme } 2x > x,}$ on obtient $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \geq f(x) \geq \int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt$.
Il reste à calculer : $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x)$ (car $x > 0$) $= \ln 2$. De même pour l'autre côté.
(b) $\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln(\frac{2x+1}{x+1}) = \ln(\frac{2+1/x}{1+1/x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc (théorème d'encadrement) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.
5. On sait f strictement croissante, et $\boxed{\text{comme } f \text{ impaire, } f(0) = 0}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\ln 2$.
6. 0 est solution, et est l'unique solution car f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln 2, \ln 2[$ (car continue et strictement croissante ...).
$\boxed{\text{Attention}}$, $\int_a^b f(t)dt = 0$ n'implique pas $a = b$ ou $\forall t \in [a, b], f(t) = 0$! (Seules les implications dans l'autre sens sont vraies : si $a = b$ alors l'intégrale est nulle etc.) Pour le visualiser, penser à une intégrale où les parties positives et négatives se compensent ...
7. (a) Résultat évident pour $x \geq 0$, et pour $x < 0$ faire la quantité conjuguée.
Ou par construction : $1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow -\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}$
$\Rightarrow 0 < x + \sqrt{x^2+1}$ (et $0 < \sqrt{x^2+1} - x$).
$\boxed{\text{Attention}}$, partir du résultat était problématique, car la 2e équivalence est fausse selon le signe de $-x$ (la fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$!)
(b) h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = g(x)$. D'où $G = h$ convient, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = h(2x) - h(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
8. *Pour aller plus loin*
(a) Difficulté : mettre sous forme intégrale $x - f(x)$. Or $x = \int_x^{2x} 1dt$ (astuce ! $\int_x^{x^2} 1dt = [t]_x^{2x} = 2x - x = x$), d'où par linéarité, $x - f(x) = \int_x^{2x} 1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$. Il reste à mettre au même dénominateur, puis faire la quantité conjuguée.
(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \leq \frac{1}{2}t^2$ d'où pour $x > 0$: par croissance de l'intégrale avec $2x > x$,
$0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} t^2 dt = \frac{1}{6}[t^3]_x^{2x} = \frac{7}{6}x^3$.
On en déduit (pour $x > 0$) : $0 \leq 1 - \frac{f(x)}{x} \leq \frac{7}{6}x^2$, puis (théorème d'encadrement), $\frac{f(x)}{x} \to 1$ en 0^+.
(c) La seule chose qui change en 0^- : le sens des bornes ($2x < x$). On obtient donc $0 \geq x - f(x) \geq \frac{7}{6}x^3$.
On conclut comme précédemment.

Pour aller beaucoup plus loin : dénombrement

1. Comme il y a 3 boules dans l'urne, $T_3(\Omega) = [\![2, 4]\!]$. On introduit les Ai (resp. B_i et C_i) "on obtient la boule 1 (resp. 2 et 3) au i^e tirage". Alors $(T_3 = 2) = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)$, réunion de 3 événements 2 à 2 incompatibles. Comme les tirages se font avec remise, $P(T_3 = 2) = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$; $(T_3 = 3) = [(A_1 \cap B_2 \cap \bar{C}_3) \cup (A_1 \cap C_2 \cap \bar{B}_3)] \cup ... \cup [(C_1 \cap A_2 \cap \bar{B}_3) \cup (C_1 \cap B_2 \cap \bar{A}_3]$ (la 3e boule doit être identique à la 1ere ou à la 2e) d'où $P(T_3 = 3) = \frac{2}{27} \times 6 = \frac{4}{9}$. Et $P(T_3 = 4) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$.
OU introduire des événements du type : D_i "on obtient au i^e tirage une boule différente des $i-1$ précédentes" (ce n'est pas un événement élémentaire, car un tel événement dépend de plusieurs tirages, mais la description

et le calcul des probabilités reste simple !)
OU *Via dénombrement :* pour pouvoir dénombrer Ω, il fallait considérer que l'on faisait dans tous les cas 4 tirages avec remise (sinon, selon les issues, on n'avait pas le même nombre de tirages). On pose donc $\Omega = \{4\text{-listes}\}$. Puis $Card(T_3 = 2) = 3$(choix 1ere boule quelconque) $*1$ (2e boule identique) $*3*3$ (3e et 4e boules quelconques, même pas tirées en pratique). D'où $P(T_3 = 2) = \frac{1}{3}$. De même $Card(T_3 = 3)$ =3*2(2e boule différente de la première) *2 (soit la 1ere soit la 2e) *3(4e boule quelconque). D'où $P(T_3 = 3) = \frac{4}{9}$.
On en déduit $E(T_3) = \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{16}{9} = \frac{26}{9} = 3 - \frac{1}{9}$. $E(T_3^2) = \frac{4}{3} + \frac{18}{9} + \frac{64}{9} = \frac{94}{9} = 10 + \frac{4}{9}$ et
$V(T_3) = 10 + \frac{4}{9} - (3 - \frac{1}{9})^2 = 1 + \frac{10}{9} - \frac{1}{81} = 2 + \frac{8}{81} \geq 0$.

2. (a) On peut avoir une même boule dès le 2e tirage, mais également attendre d'avoir eu une première fois toutes les boules avant d'en avoir une déjà tirée. D'où $T_N(\Omega) = [\![2, N+1]\!]$.

   (b) Comme pour la première question, plusieurs rédactions possibles :
   Rédaction 1 (suggérée par l'indication de l'énoncé, mais peut-être plus difficile à comprendre) : L'événement $(T_N = 2)$ se réalise ssi les 2 premiers tirages donnent la même boule, que ce soit la boule 1,2 ou ...,N. : $(T_N = 2) = \{(i,i), i \in [\![1, N]\!]\}$. Il y a donc N issues, chacune de probabilité $\frac{1}{N^2}$ (tirage d'une boule puis d'une 2e) d'où $P(T_N = 2) = N \times \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$.
   $(T_N = N+1)$ ssi on obtient une fois chacune des boules avant de finir par une des boules : il y a N choix pour cette dernière boule, puis également $N!$ choix de permutation des N permières boules tirées. Il y a donc $N \times N!$ issues. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{N^{N+1}}$ d'où $P(T_N = N+1) = N \times N!\frac{1}{N^{N+1}} = \frac{N!}{N^N}$
   Rédaction 2 : on convient que l'on fait systématiquement les $N+1$ tirages. Alors $\Omega = \{N+1-listes\}$ et $Card(\Omega) = N^{N+1}$. Puis $card(T_N = 2) = N$(choix 1ere boule) $*1$(choix 2e boule identique)$*N^{N-1}$(les derniers tirages n'ayant pas de contraintes) d'où $P(T_N = 2) = \frac{N^N}{N^{N+1}} = \frac{1}{N}$ et de même $Card(T_N = N+1) = N!$ (permutation des N boules) $*N$ (choix de la dernière boule, identique à l'une des précédentes) : d'où $P(T_N = N+1) = \frac{N!N}{N^{N+1}} = \frac{N!}{N^N}$.
   Rédaction 3 : on garde les $\bar{D}_i$: $(T_N = 2) = D_1 \cap \bar{D}_2$ et $(T_N = N+1) = D_1 \cap ... \cap D_N \cap \bar{D}_{N+1}$ ...

   (c) Soit $k \in [\![1, N]\!]$. L'événement $(T_N > k)$ se réalise ssi les k premiers tirages ont donné des boules 2 à 2 distinctes càd que les k premiers tirages forment un k- arrangement des boules. Il y a donc $A_N^k = \frac{N!}{(N-k)!}$ issues, chacune de probabilité $\frac{1}{N^k}$. D'où $P(T_N > k) = \frac{N!}{(N-k)!N^k} = \frac{N(N-1)(N-2)...(N-k+1)}{N^k} = \frac{N}{N} \times \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N} ... \times \frac{N-k+1}{N}$
   $= 1 \times (1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N})...(1 - \frac{k-1}{N}) = \prod_{i=0}^{k-1}(1 - \frac{i}{N})$.
   Ou via la rédaction 2 : $Card(T_N > k) = A_n^k * N^{N+1-k}$, et via la rédaction 3 : $(T_N > k) = D_1 \cap ... \cap D_k$.
   Puis $\forall k \in [\![2, N+1]\!]$, $P(T_N = k) = P(T_n > k-1) - P(T_N > k) = \prod_{i=0}^{k-2}(1 - \frac{i}{N}) - \prod_{i=0}^{k-1}(1 - \frac{i}{N}) = \frac{k-1}{N}\prod_{i=0}^{k-2}(1 - \frac{i}{N})$

   (d) Comme k est fixé, $\frac{i}{N} \to 0$, pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ d'où par produit fini $P(T_N > k) \to 1$. Effectivement, quand le nombre de boules devient grand, il faut beaucoup de tirages pour tomber sur une même boule !

   (e) $E(T_N) = \sum_{k=2}^{N+1} kP(T_N = k) = \sum_{k=2}^{N+1} k(P(T_N > k-1) - P(T_N > k)) = \sum_{k=2}^{N+1} kP(T_N > k-1) - \sum_{k=2}^{N+1} kP(T_N > k)$
   $= \sum_{j=1}^{N}(j+1)P(T_N > j) - \sum_{k=2}^{N+1} kP(T_N > k) = 2P(T_N > 1) + \sum_{k=2}^{N} P(T_N > k) - (N+1)P(T_N > N+1)$
   $= 2 + \sum_{k=2}^{N} P(T_N > k) + 0 = \sum_{k=0}^{N} P(T_N > k)$ car $P(T_N > 1) = 1 = P(T_N > 0)$ vu les valeurs prises de T_N.
   On en déduit $E(T_N) = 1 + \sum_{k=1}^{N} P(T_N > k) = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!N^k}$ (formule encore vraie pour $k = 0$)
   $= N! \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(N-k)!(N^k)} = N! \sum_{k=0}^{N} \frac{N^{n-k}}{(N-k)!N^N} = \frac{N!}{N^N} \sum_{k=0}^{N} \frac{N^{N-k}}{(N-k)!} = \frac{N!}{N^N} \sum_{j=0}^{N} \frac{N^j}{j!}$ (chgt de variable $j = N - k$).