

Corrigé du devoir maison 12

Question

Pour tout $n \geq 1$, $\frac{3n^2+1}{2^{n-1}} = \frac{3n(n-1)+3n+1}{2^{n-1}} = (3n(n-1) + 3n + 1)(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{3}{2}[n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2}] + 3n(\frac{1}{2})^{n-1} + 2(\frac{1}{2})^n$.
On reconnaît une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques convergentes car $|\frac{1}{2}| < 1$.

Variante : pour la dernière somme, on aurait pu poser $j = n - 1 \dots$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{3n^2+1}{2^{n-1}}$ converge et sa somme vaut $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n$.

Les bornes de départ pour les deux premières séries sont les bonnes mais pas pour la 3e d'où d'après la relation de Chasles (variante : utiliser la formule généralisée du cours)

$$S = \frac{3}{2} \frac{2}{(1-(1/2))^3} + 3 \frac{1}{(1-(1/2))^2} + 2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^0 \right) = 24 + 12 + 2(\frac{1}{1-1/2} - 1) = 38.$$

Exercice 1 : début edhec 2009 Soit $x \in [0, 1[$ un réel fixé.

1. Pour tout $t \in [0, x] \subset [0, 1[$, $\sum_{p=1}^n t^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} t^p = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$.
2. On intègre sur $[0, x]$ l'égalité du 1. (les fonctions en jeu sont toutes continues sur $[0, x]$) : $\int_0^x \sum_{p=1}^n t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} dt$ d'où par linéarité : $\sum_{p=1}^n \int_0^x t^{p-1} dt = -\int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ càd $\sum_{p=1}^n [\frac{t^p}{p}]_0^x = -[\ln|1-t|]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$
d'où le résultat : $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
3. Encadrement. Pour tout $t \in [0, x]$, $t \leq x$ donc $1-t \geq 1-x \geq 0$ donc $0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$ et $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$ (car $t^n \geq 0$).
Par croissance de l'intégrale ($0 \leq x$), $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x} [\frac{1}{n+1} t^{n+1}]_0^x = \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+1}$
puisque $x < 1$. Conclure avec le théorème d'encadrement (quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{1-x} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$).
4. En passant à la limite dans l'égalité du 2), obtient $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(1-x) \in \mathbb{R}$. Par définition, la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ converge donc et la valeur de sa somme est : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc comme les séries de terme général $\frac{x^n}{n}$ et $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^p}{p}$ (avec $p = n+1$) convergent d'après la question 4., par linéarité la série de terme général $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge. De plus,
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x \ln(1-x) - \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -x \ln(1-x) - (\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} - \frac{x^1}{1})$
 $= -x \ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x) = x + (1-x) \ln(1-x)$.

Exercice 2 Exercice 2 : Ecricome S 2016

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ d'où
comme $x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'après l'équivalent donné dans l'énoncé, $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sim -\frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2}$.
- (b) Attention au signe ! Pour le critère d'équivalence, il faut que les 2 termes généraux soient positifs !
Méthode 1 : via la linéarité.
En multipliant tout par -1, on a : $-(w_{n+1} - w_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.
Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2n^2} \geq 0$, donc à partir d'un certain rang, $-(w_{n+1} - w_n) \geq 0$. Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$), par critère d'équivalence des séries à terme positifs, la série $\sum_{n \geq 1} -(w_{n+1} - w_n)$ converge. Donc par linéarité, la série $\sum_{n \geq 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge.
Méthode 2 : via la convergence absolue.
 $|w_{n+1} - w_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$) donc, par linéarité, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge. Par théorème d'équivalence des séries à terme positifs, la série $\sum_{n \geq 1} |w_{n+1} - w_n|$ converge. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge absolument donc converge.
Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = w_n - w_1$, donc $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) + w_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) + w_1 \in \mathbb{R}$
Donc la suite (w_n) converge. (cf cours, il y a même une équivalence de convergence !)
2. Par quotient, la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\varphi'(t) = \dots = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$ donc $\varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln(t) < 1 \Leftrightarrow t < e^1$.
Limites : en 0, pas de F.i. $\varphi(t) \rightarrow -\infty$, et en $+\infty$, d'après les croissances comparées, $\varphi(t) \rightarrow 0$.

3. (a) Soit $n \geq 2$. Ainsi : $2n + 3 > 2n + 2 > 2n + 1 > 3 > e$, et on sait φ décroissante sur $[e, +\infty[$. On a alors (relation de Chasles) : $S_{2(n+1)} - S_{2n} = \dots = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \varphi(2n+2) - \varphi(2n+1) \leq 0$
 $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} = -\varphi(2n+3) + \varphi(2n+2) \geq 0$
 $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- (b) Les deux suites adjacentes sont donc convergentes et admettent la même limite ℓ . Comme ces deux suites recouvrent tous les termes de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ (suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$) alors cette dernière converge elle aussi vers ℓ , donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
- Enfin, pour tout $n \geq 3$, on a : $|u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$. Mais la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ diverge.
4. (a) φ est décroissante sur $[e, +\infty[$ et $n+1 > n \geq 3 > e$ donc : $\forall t \in [n, n+1]$, $\varphi(n+1) \leq \varphi(t)$
Par croissance de l'intégrale (et bornes croissantes), on a : $\int_n^{n+1} \varphi(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$.
Or $\int_n^{n+1} \varphi(n+1) dt = \varphi(n+1) \int_n^{n+1} 1 dt = \varphi(n+1) [t]_n^{n+1} = \varphi(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$
et $\int_n^{n+1} \varphi(t) dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{t} \ln t dt = [\frac{1}{2}(\ln t)^2]_n^{n+1} = \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.
- (b) Soit $n \geq 3$. On a ainsi : $v_{n+1} - v_n = \dots = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} + \frac{\ln(n)^2}{2} \leq 0$ d'après (a).
5. (a) Soit $n \geq 1$. On a : $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$
 $= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \right) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$.
- (b) d'où $S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \left[v_n + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \right] - \left[v_{2n} + \frac{[\ln(2n)]^2}{2} \right]$
 $= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2 - [\ln(2n)]^2}{2} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[-\ln(2)][2\ln(n) - \ln(2)]}{2}$
6. On sait : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$ (par convergence). Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \gamma$
d'où $S_{2n} = \ln(2)w_n - \frac{[\ln(2)]^2}{2} + (v_n - v_{2n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2} + 0$