Corrigé du devoir maison 13

Question préliminaire : Introduire les P_i, F_i : alors $A = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$.

Donc A est une réunion de 2 événements incompatibles et les lancers sont indépendants, d'où $a = P(A) = p^2 + q^2$.

1. (a) `function y=lancer(p)`
`if rand() < p, then y=1, else y=0, end`
`endfunction`
- (b) `p=input('entrer p')`
`x=lancer(p), y=lancer(p), T=2`
`while x==y`
`x=lancer(p), y=lancer(p), T=T+2,`
`end`
`disp(T)`

2. Faire une belle phrase pour dire que les lancers se font deux par deux, donc T ne prend que les valeurs paires non-nulles : $T(\Omega) = \{2k, k \in \mathbb{N}^*\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(T = 2k + 1) = 0$.
3. On introduit les événements A_i : "le i^{e} double lancer apporte deux résultats identiques" pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Alors $(T = 2) = \bar{A}_1$ et plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(T = 2k) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap \bar{A}_k$. D'après la formule des probabilités composées (cas ambigu de non-indépendance car condition d'arrêt), comme $P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \neq 0$, $P(T = 2k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(\bar{A}_k) = a^{k-1}(1-a)$.

4. Faire une phrase pour la cv de la série.

Par exemple, comme T est une variable aléatoire (sous-entendu les événements $(T = 2k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles), la série converge et ...

Ou directement : les événements $(T = 2k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles donc par σ -additivité, la série converge et ...

Ou remarquer la cv en regardant le terme général

Bref, la série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = 2k) = (1-a) \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1} = (1-a) \sum_{j=0}^{+\infty} a^j = (1-a) \frac{1}{1-a} = 1$. On en déduit que presque sûrement l'expérience se termine en un nombre fini de parties.

5. Variante courte : poser $Y = \frac{1}{2}T$. Alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = P(\frac{1}{2}T = k) = P(T = 2k) = (1-a)a^{k-1}$ d'où $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a)$.

On en déduit sans calculs : $E(Y) = \frac{1}{1-a}$ et $V(Y) = \frac{a}{(1-a)^2}$ d'où comme $T = 2Y$, par linéarité de l'espérance, $E(T) = 2E(Y) = \frac{2}{1-a} = \frac{1}{pq}$, et par propriété de la variance, $V(T) = 2^2V(Y) = \frac{4a}{(1-a)^2}$

Variante longue : Il faut étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n \in T(\Omega)} nP(T = n)$ ce qui revient à l'étude de

la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} 2kP(T = 2k)$ (au vu de $T(\Omega)$) : la convergence simple suffit puisque tous les termes sont positifs.

Or, pour $k \geq 1$, $2kP(T = 2k) = 2(1-a)ka^{k-1}$ donc à un scalaire près ($2(1-a)$), on reconnaît le terme général de la série géométrique dérivée première de raison a qui converge puisque $0 < a = p^2 + q^2 < p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 = 1$.

D'où par linéarité, T admet une espérance et $E(T) = 2(1-a) \sum_{k=1}^{+\infty} ka^{k-1} = 2(1-a) \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{2}{1-a}$.

Pour la variance, commencer par étudier $E(T^2)$ c'ad la série $\sum_{k \geq 1} (2k)^2 a^{k-1} (1-a)$ (rappel, ici cv absolue inutile)

Or pour $k \geq 1$, $(2k)^2 a^{k-1} (1-a) = 4(1-a)[k^2 a^{k-1}] = 4(1-a)a[k(k-1)a^{k-2}] + 4(1-a)[ka^{k-1}]$ avec l'astuce $k^2 = k(k-1) + k$. Combinaison linéaire de 2 T.G. de séries convergentes car $|a| < 1$, donc $E(T^2)$ existe et $E(T^2) = 4(1-a)a \frac{2}{(1-a)^3} + 2E(T) = \dots = \frac{4a+4}{(1-a)^2}$.

On conclut avec la formule de Koenig-Huygens : T admet une variance et $V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \dots = \frac{4a}{(1-a)^2}$.

Ici utiliser la méthode 2 n'était pas rapide, car du fait du "2", l'étude de $E(T(T-1))$ n'était pas immédiate (car la série associée était $\sum_{k \geq 1} 2k(2k-1)P(T = 2k)$, et $2k(2k-1) \neq 4k(k-1)$...). Mais pour ceux qui l'ont fait,

penser à la convergence absolue de la série ci-dessus, puis penser à citer la linéarité pour en déduire que $E(T^2)$ existe et $E(T^2) = E(T(T-1)) + E(T)$, avant de conclure comme ci-dessus.

6. Le résultat de l'expérience est le dernier lancer effectué donc $R(\Omega) = \{0, 1\}$. Puis d'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $(T = 2k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $P(R = 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((T = 2k) \cap (R = 1))$ (ici l'écriture de la formule est plus judicieuse avec des $\cap$ qu'avec des sachant, car le dernier lancer fait partie des lancers concernés par T).

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(T = 2k) \cap (R = 1) = A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap (\bar{A}_k \cap (R = 1)) = A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap (F_{2k-1} \cap P_{2k})$ (puisque les deux derniers lancers doivent être différents, et que le résultat donc le dernier doit être pile).

On en déduit par indépendance mutuelle des lancers : $P((T = 2k) \cap (R = 1)) = a^{k-1}pq$ et finalement,

$P(R = 1) = pq \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1} = pq \frac{1}{1-a} = \frac{1}{2}$ puisque $1-a = 1-p^2 - (1-p)^2 = 2pq$.

D'où $P(R = 0) = 1 - P(R = 1) = \frac{1}{2}$. L'expérience proposée fournit bien un lancer de pièce équilibré !