

Corrigé du devoir maison 14

Exercice 1 : extrait d'edhec E 2018

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus $1+t^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \sim \frac{1}{t^{2n}} = \frac{1}{t^{2n}}$.
Comme $2n \geq 2 > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ converge, donc d'après le critère d'équivalence pour les fonctions continues et positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge. Puis par continuité de l'intérieur sur $[0, 1]$, on en déduit que l'intégrale u_n converge bien.
- Poser $A > 0$. Alors $\int_1^A \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(1+t^2)]_0^A = \arctan(A) - \arctan(0) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$. Donc $u_1 = \frac{\pi}{2}$.
- Par linéarité, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-(1+t^2)}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \leq 0$.
En effet, pour tout $t \geq 0$, $\frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \leq 0$, et les bornes sont dans le bon sens, donc la positivité des intégrales convergentes permet d'obtenir le signe de l'intégrale. De plus, pour des raisons très similaires, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$, donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge.
- Soit $n_i n_N Ns$. D'après 3., $u_n - u_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$. On va faire une IPP : $u = \frac{1}{1+t^2} = (1+t^2)^{-1}$ et $v' = 1$ d'où, $u' = -2t(1+t^2)^{-2} = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$ et $v = t$. u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Il reste à poser $A > 0$.
Alors $\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = [\frac{t}{(1+t^2)^n}]_0^A + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 + 2n(u_n - u_{n+1})$, car $\frac{A}{(1+A^2)^n} \sim \frac{A}{A^{2n}} = \frac{1}{A^{2n-1}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ ($2n-1 > 0$). Finalement, on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2n(u_n - u_{n+1})$.
- On en déduit : $u_n = 2nu_n - 2nu_{n+1}$ soit encore $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n$, puisque $n \neq 0$.
- Par récurrence : pour $n = 1$, $u_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{0!}{2^0 \times (0!)^2} \frac{\pi}{2} = 1 \times \frac{\pi}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} \times ((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2}$ et montrons que $u_{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
Or $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n = \frac{2n-1}{2n} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} \times ((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2} \times \frac{2n}{2n} = \frac{(2n)!}{2 \times n \times 2 \times n \times (2^{2n-2} \times ((n-1)!)^2)} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n(n-1)!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
Conclure.

Exercice 2 : edhec S 2007

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x+1/n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
De plus : $\forall x \geq 0$, $0 \leq \frac{e^{-x}}{x+1/n} \leq \frac{e^{-x}}{1/n} = ne^{-x}$ OU $\frac{e^{-x}}{x+1/n} = o(e^{-x})$ OU ... Comme $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge (intégrale de référence), par critère de comparaison (ou négligeabilité) des intégrales de fonctions continues et positives, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1/n} dx$ converge.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{n} \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-x}}{x+1/n} \leq e^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, comme les intégrales convergent, et que les bornes sont dans le bon sens on a : $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1/n} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}$.
En effet, $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} + e^{-1} = e^{-1}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{e}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto e^{-t}$, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{-x} \geq e^{-1}$ d'où par positivité de $x + \frac{1}{n}$, $\frac{e^{-1}}{(x+\frac{1}{n})} \leq \frac{e^{-x}}{(x+\frac{1}{n})}$, et donc comme $0 < 1$, par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent) $\int_0^1 \frac{e^{-1}}{(x+\frac{1}{n})} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x+\frac{1}{n})} dx$. On conclut en calculant $\int_0^1 \frac{e^{-1}}{(x+\frac{1}{n})} dx = \frac{1}{e} [\ln(x+\frac{1}{n})]_0^1 = \frac{1}{e} \ln(n+1)$.
- (c) D'après la relation de Chasles, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n + w_n \geq v_n \geq \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- (a) La fonction $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ comme quotient de fonctions continues et de dénominateur ne s'annulant pas sur $]0, 1]$. De plus, $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ d'où $e^{-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$ car $u = -x \rightarrow 0$, et finalement $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \rightarrow 1$ donc f se prolonge par continuité en 0. L'intégrale, faussement impropre en 0, converge.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in]0, 1]$, on a $e^{-x} \leq e^0 = 1$ donc $1 - e^{-x} \geq 0$ et $0 \leq x \leq x + \frac{1}{n}$ d'où $0 \leq \frac{1-e^{-x}}{x+1/n} \leq \frac{1-e^{-x}}{x}$.
Comme les intégrales convergent, et que $0 < 1$, $0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+1/n} dx \leq I$ pour tout entier $n \geq 1$.
- (c) Linéarité (toutes les intégrales sont définies) : $0 \leq \int_0^1 \frac{1}{x+1/n} dx - v_n \leq I$, d'où $0 \leq \ln(n+1) - v_n \leq I$ et enfin, $\ln(n+1) - I \leq v_n \leq \ln(n+1)$.
- (d) Comme $\ln(n+1) > 0$ pour tout $n \geq 1$, $1 - \frac{I}{\ln(n+1)} \leq \frac{v_n}{\ln(n+1)} \leq 1$ et par le théorème d'encadrement, on a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\ln(n+1)} = 1$. D'où $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1)$. Comme par ailleurs, $w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ (faire le quotient), on obtient $u_n = v_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1)$.