

Corrigé du devoir maison 2

Exercice 1 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n 2 \times 3 = \sum_{k=1}^n 6 = 6n$ (somme d'une constante)
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n 2^k 3^{n-k}$ Attention : il n'y a pas de coefficient binomial, donc se ramener à une somme géométrique (et non à la formule du binôme), en sortant ce qui ne dépend pas de k par linéarité
$$w_n = 3^n \sum_{k=1}^n 2^k 3^{-k} = 3^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \times \frac{(2/3) - (2/3)^{n+1}}{1 - 2/3} \text{ car } \frac{2}{3} \neq 1.$$
3. Ici on va se ramener à la formule du binôme, car il y a des factorielles. Remarquer également que $n!$ est une constante par rapport à k , donc on peut sortir cette quantité par linéarité. Enfin, ne pas oublier de se ramener à la bonne borne de départ, via une relation de Chasles. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0 3^n \right] = \frac{1}{n!} [(2+3)^n - 1 \times 1 \times 3^n] = \frac{1}{n!} (5^n - 3^n).$$

Exercice 2 :

1. Par définition, $x^{1-x^2} = e^{(1-x^2) \ln x}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Attention, pas d'opération puissance sur des limites ! (seulement produit, somme, quotient ...)
Donc on utilise la forme exponentielle : $f(x) = e^{(1-x^2) \ln x}$.
En 0 : comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2) \ln x = -\infty$ d'où par composition avec l'exp, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
En $+\infty$: comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x^2) \ln x = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme produit et composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = [-2x \ln x + (1-x^2) \frac{1}{x}] e^{(1-x^2) \ln x} = x[-2 \ln x + \frac{1-x^2}{x^2}] e^{(1-x^2) \ln x}$ d'où le résultat.
4. Comme pour tout $x > 0$, $x e^{(1-x^2) \ln x} > 0$, le signe de f est celui de g en ayant posé sur $\mathbb{R}_+^*$ $g : x \mapsto -2 \ln x + \frac{1}{x^2} - 1$.
 g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = -2 \frac{1}{x} - 2 \frac{1}{x^3} < 0$ (somme de 2 termes négatifs).
Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: on fait le TV complet. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
Problème pour connaître le signe de g !! Mais, on remarque $g(1) = 0$.
D'où g est positive sur $]0, 1]$ et négative ensuite. (sinon, appliquer le théorème de la bijection pour deviner que g ne va s'annuler qu'une seule fois : introduire α cette solution, et faire le tableau en fonction de α ...)

Corrigé du devoir maison 2

Exercice 1 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n 2 \times 3 = \sum_{k=1}^n 6 = 6n$ (somme d'une constante)
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n 2^k 3^{n-k}$ Attention : il n'y a pas de coefficient binomial, donc se ramener à une somme géométrique (et non à la formule du binôme), en sortant ce qui ne dépend pas de k par linéarité
$$w_n = 3^n \sum_{k=1}^n 2^k 3^{-k} = 3^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \times \frac{(2/3) - (2/3)^{n+1}}{1 - 2/3} \text{ car } \frac{2}{3} \neq 1.$$
3. Ici on va se ramener à la formule du binôme, car il y a des factorielles. Remarquer également que $n!$ est une constante par rapport à k , donc on peut sortir cette quantité par linéarité. Enfin, ne pas oublier de se ramener à la bonne borne de départ, via une relation de Chasles. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0 3^n \right] = \frac{1}{n!} [(2+3)^n - 1 \times 1 \times 3^n] = \frac{1}{n!} (5^n - 3^n).$$

Exercice 2 :

1. Par définition, $x^{1-x^2} = e^{(1-x^2) \ln x}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Attention, pas d'opération puissance sur des limites ! (seulement produit, somme, quotient ...)
Donc on utilise la forme exponentielle : $f(x) = e^{(1-x^2) \ln x}$.
En 0 : comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2) \ln x = -\infty$ d'où par composition avec l'exp, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
En $+\infty$: comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x^2) \ln x = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme produit et composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = [-2x \ln x + (1-x^2) \frac{1}{x}] e^{(1-x^2) \ln x} = x[-2 \ln x + \frac{1-x^2}{x^2}] e^{(1-x^2) \ln x}$ d'où le résultat.

4. Comme pour tout $x > 0$, $xe^{(1-x^2)\ln x} > 0$, le signe de f est celui de g en ayant posé sur $\mathbb{R}_+^*$ $g : x \mapsto -2\ln x + \frac{1}{x^2} - 1$.
 g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = -2\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^3} < 0$ (somme de 2 termes négatifs).
 Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: on fait le TV complet. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
 Problème pour connaître le signe de g !! Mais, on remarque $g(1) = 0$.
 D'où g est positive sur $]0, 1]$ et négative ensuite. (sinon, appliquer le théorème de la bijection pour deviner que g ne va s'annuler qu'une seule fois : introduire α cette solution, et faire le tableau en fonction de α ...)