## Corrigé du devoir maison 4

### Exercice 1 :

1. $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0 \text{ et } x - 1 \neq 0\} = ]0, 1[\cup]1, +\infty[$
2. Faire un tableau de signe : $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. On trouve $f$ positive sur $\mathcal{D}$.
3. En 0 : pas de FI. $x - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$ et $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc par quotient : $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
   Asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   En $+\infty$, FI $\infty/\infty$ donc on factorise par le prépondérant $f(x) = \frac{\ln x}{x(1-1/x)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1-1/x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car d'après les croissances comparées $\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
   Ou via les équivalents $f(x) \sim \frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ...
   En 1 : FI $0/0$ ; posons $X = x - 1 \Leftrightarrow x = X + 1$ avec $\lim\limits_{x\to 1} X = 0$. Alors $f(x) = \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1+X)}{X} \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$ (limite usuelle). Donc $f$ se prolonge par continuité en 1 avec la valeur 1.
4. $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{1/x(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$ car $x > 0$.
5. $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = ... = -\ln x$ donc .... (faire TV) $\varphi$ admet un maximum en 1.
   On remarque (pour la question suivante) que comme $\varphi(1) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) \leq 0$.
   Ici, on demandait le TV complet de $\varphi$, afin de vous entraîner sur les limites (mais on n'en avait pas besoin pour le signe de $\varphi$ !). En 0 : FI $0 \times \infty$ sur le dernier terme. Comme d'après les croissances comparées, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$. En $+\infty$, FI $\infty - \infty$ : on met en facteur $x$ (dans les termes qui posent problème) : $\varphi(x) = x(1 - \ln(x)) - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (pas de croissances comparées ici !).
6. $f$ est donc décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Comme $f$ se prolonge par continuité en 1, inutile de mettre une double barre en 1 pour $f$ dans le tableau de variations : on peut considérer $f$ décroissante sur $]0, +\infty[$ (par contre laisser la double barre sur $f'$). Tout ceci sera revu dans le chapitre dérivabilité.
7. Pour le graphique, dessiner les asymptotes (verticale en 0, horizontale en $+\infty$), puis faire une allure qui ne s'arrête pas en 1 (puisque prolongement par continuité).

### Exercice 2 :

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, **il existe** deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que $H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$.
   $n = 0$ : trouvons $a_0$ et $b_0$ qui conviennent. Or $H^0 = I_3$, donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ permettent d'avoir la forme souhaitée.
   Supposons que pour un certain $n$, on a trouvé deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que $H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$. Et trouvons deux réels $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ tels que $H^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 & b_{n+1} \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & 0 & a_{n+1} + 2b_{n+1} \end{pmatrix}$.
   Or $H^{n+1} = H^n H = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & 0 & a_n + 2b_n \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ a_n + 2b_n & 0 & 2a_n + 3b_n \end{pmatrix}$. Donc en posant $a_{n+1} = b_n (*)$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n (**)$ on a la forme voulue.
   Conclure, en donnant les relations de récurrence trouvées des deux suites.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant (**) $b_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = b_n + 2b_{n+1}$ d'après (*). Donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 : on résout $x^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.
   On trouve $\Delta = 8$ d'où $x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-\sqrt{4}\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} = \lambda_1$ et de même, $x_2 = \lambda_2$.
   Donc : $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lambda(\lambda_1)^n + \mu(\lambda_2)^n$.
   Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} \lambda(\lambda_1)^0 + \mu(\lambda_2)^0 = b_0 \\ \lambda(\lambda_1)^1 + \mu(\lambda_2)^1 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2 = 1 \end{cases}$ puisque $b_1 = a_0 + 2b_0 = 1$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -\mu(1 - \sqrt{2}) + \mu(1 + \sqrt{2}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 2\mu\sqrt{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$
   Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-(1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n)$.
3. Pour la forme explicite de $a_n$ inutile de refaire tous les calculs !
   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = b_n$ donc pour tout $\boxed{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = b_{n-1}$.
   (Ici l'énoncé demandait explicitement la forme de $a_n$ pour $n$ non-nul, mais j'ai décidé de le rédiger comme si

$n \in \mathbb{N}$, afin de vous montrer la rédaction.)
D'où $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-(1-\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})^{n-1})$. (en fait on peut facilement vérifier que la formule obtenue pour $n \geq 1$ reste encore vraie pour $n = 0$ donc si il y avait des questions supplémentaires, on aurait une même formule pour $a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

**Exercice 3 :**

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors $MD = \begin{pmatrix} 0 & 3b & 3c \\ 0 & 3e & 3f \\ 0 & 3h & 3i \end{pmatrix}$ et $DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$.
   D'où $MD = DM \Leftrightarrow b = c = d = g = 0$ et $E = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}, a, e, f, h, i \in \mathbb{R} \}$

2. (a) Soit une matrice diagonale $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ alors $M^2 - M + D = \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - b + 3 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - c + 3 \end{pmatrix}$
   donc $M^2 - M + D = 0 \Rightarrow b^2 - b + 3 = 0$ impossible car $\Delta < 0$.
   (b) $M^2 - M + D = 0 \Leftrightarrow D = M - M^2$ d'où $DM = M^2 - M^3$ et $MD = M^2 - M^3$. Donc $MD = DM$ et $M \in E$.
   (c) *** Les solutions sont à chercher parmi les matrices de $E$ : on commence donc par résoudre l'équation avec de telles matrices.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$. Alors $M^2 - M + D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ e^2 + hf - e - 3 = 0 \\ ef + if - f = 0 \\ eh + ih - h = 0 \\ fh + i^2 - i - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ e^2 + hf - e + 3 = 0 \\ f(e + i - 1) = 0 \\ h(e + i - 1) = 0 \\ fh + i^2 - i + 3 = 0 \end{cases}$
   Le système étant difficile, on ne va pas chercher à le résoudre par équivalences.
   Il suffit de trouver une infinité de solutions. Pour $L_1$, choisir $a = 0$ ou $a = 1$. Pour valider $L_3$ et $L_4$, prendre $e + i - 1 = 0 \Leftrightarrow i = e - 1$ (si on avait pris $f = h = 0$, les lignes $L_2$ et $L_5$ n'auraient pas donné de solutions cf 2.(a)). Réaliser alors que sous cette condition, $L_5 = L_2$. Il reste donc $L_2$ (en plus de $i = e - 1$ ; et de $a \in \{0, 1\}$). Or dès que $hf < 0$, on obtient $\Delta > 0$ donc il y aura deux solutions en $e$ (donc en $i$).
   Il y a une infinité de $hf < 0$ possibles d'où la conclusion.

**Exercice 4**

1.
```
function y=f(n)
u=1
for i=1:n
u=u+1/u
end
y=u
endfunction
```
Ou le programme
```
n=input('entrer n')
u=1
for i=1:n
u=u+1/u
end
disp(u)
```

2. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$u_n$ existe et $u_n > 0$". (Attention de ne pas confondre la suite $(u_n)$ avec le terme $u_n$).
   *cas n=0* : $u_0 = 1 > 0$.
   Supposons que pour un certain $n$, $u_n$ existe et $u_n > 0$. Montrons que pour ce $n$,$u_{n+1}$ existe et $u_{n+1} > 0$. Or vu la relation de récurrence, $u_{n+1}$ existe car $u_n > 0$ donc $u_n \neq 0$. Puis par somme, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0 + 0 = 0$.
   *Ccl :* la suite est bien définie et strictement positive.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ donc la suite est croissante (strictement).
   (c) Raisonnons par l'absurde, et supposons que la suite $u$ converge. On peut alors noter $\ell$ sa limite, avec $\ell \geq 0$. Oups, cela ne suffit pas pour passer à la limite dans la relation de récurrence car il faut $\ell \neq 0$ (du fait du terme en $1/u_n$ ) ! Mais la suite est croissante et $u_0 = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $\ell \geq 1$. Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient alors $\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow \frac{1}{\ell} = 0$ ce qui est impossible.
   Donc la suite $u$ diverge, et comme elle est croissante, on en déduit qu'elle diverge vers $+\infty$ : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. (a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$
   (b) **Méthode 1**
   On somme la relation précédente : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2 + \frac{1}{u_k^2})$.
   Or la somme de gauche est une somme télescopique : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2$, et par linéarité, on peut

réexprimer la somme de droite : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(2+\frac{1}{u_k^2}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}2+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = 2n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$.

D'où $u_n^2-u_0^2 = 2n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$ et finalement, $u_n^2 = u_0^2+2n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = 1+2n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$.

**Méthode 2 :** par récurrence.

$n=1$ : $u_1 = u_0+\frac{1}{u_0} = 2$ donc $u_1^2 = 4$ et $2\times 1+1+\sum\limits_{k=0}^{0}\frac{1}{u_k^2} = 3+1 = 4$.

Supposons pour un certain $n\geq 1$, $u_n^2 = 2n+1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$ et montrons que $u_{n+1}^2 = 2(n+1)+1+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k^2}$.

Or d'après (a), $u_{n+1}^2 = u_n^2+2+\frac{1}{u_n^2}$ d'où par H.R.

$u_{n+1}^2 = 2n+1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}+2+\frac{1}{u_n^2} = 2n+3+[\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}+\frac{1}{u_n^2}] = 2n+3+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k^2}$.

Conclure.

(c) Il suffit de remarquer dans 2.(b) que $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}\geq 0$, d'où $u_n^2\geq 2n+1$.

Ou faire la différence ! D'après a), $u_n^2-(2n+1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}\geq 0$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$, on a $u_n = \sqrt{u_n^2}$, donc on en déduit : $u_n\geq\sqrt{2n+1}$, d'où par comparaison, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. (a) Soit $n\geq 2$. On veut majorer $u_n^2 = 2n+1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$ par $2n+2+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

(Pourquoi prendre $n\geq 2$ ? car ainsi, $n-1\geq 1$ et la dernière somme n'est pas "vide").

**Méthode 1**. On fait la différence : $2n+2+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-u_n = 2n+2+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-(2n+1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2})$

$= 1+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = 1+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-(\frac{1}{u_0^2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}) = 1-1+\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2}\frac{1}{k}-\frac{1}{u_k^2}) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{u_k^2-2k}{2k\times u_k^2}\geq 0$ puisque d'après 2.c), pour tout $k\geq 1$, $u_k^2\geq 2k+1\geq 2k$.

**Méthode 2 :** (pour majorer $u_n^2 = 2n+1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$ , il faut minorer $\frac{1}{u_k^2}$, pour pouvoir minorer la somme).

Pour tout $k\geq 1$, $u_k^2\geq 2k+1>2k$ donc $\dfrac{1}{u_k^2}\leq\dfrac{1}{2k}$ (le terme en $k=0$ est donc à garder à part).

Donc pour $n\geq 2$ ($\Leftrightarrow n-1\geq 1$), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{u_0^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}\leq 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k} = 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

D'où $u_n^2 = 2n+1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}\leq 2n+2+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(b) Comme pour tout $k\geq 2$, $\frac{1}{k}\leq\ln(k)-\ln(k-1)$, par somme de ces inégalités, on obtient, (pour $n\geq 3$), $\sum\limits_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}\leq\sum\limits_{k=2}^{n-1}(\ln(k)-\ln(k-1)) = \ln(n-1)-\ln(1) = \ln(n-1)$. D'où par (a),

$u_n^2\leq 2n+2+\frac{1}{2}(1+\sum\limits_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k})\leq 2n+2+\frac{1}{2}(1+\ln(n-1))$ soit encore, $u_n^2\leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$.

(c) Des questions 2.(c) et 3.(b) on obtient l'encadrement $2n+1\leq u_n^2\leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$

Par définition de la notion de suite équivalente, il faut montrer que le Or en divisant par $2n$ l'encadrement précédent, on obtient :

$1+\frac{1}{2n}\leq\frac{u_n^2}{2n}\leq 1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n-1)}{4n}$ et d'après le théorème d'encadrement, $\frac{u_n^2}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (appliquer les croissances comparées au terme $\frac{\ln(n-1)}{4n} = \frac{1}{4}[\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(1-1/n)}{n}]$). Donc $u_n^2\sim 2n$, et en prenant la puissance 1/2 (opération permise sur les équivalents ... on le verra en cours), $u_n\sim\sqrt{2n}$.