Corrigé du devoir maison facultatif 7

Questions

1. Il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, car alors, par définition cela en fait un espace vectoriel. Méthode des 3 points. Par définition, $E \subset \mathbb{R}[X]$, et si on note $Q(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ le polynôme nul, alors $Q'(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $Q(0) + Q'(0) = 0 + 0 = 0$ donc $Q \in E$ et $E \neq \varnothing$.
Enfin, soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on sait : $P(0) + P'(0) = 0$ et $Q(0) + Q'(0) = 0$. Montrons que $\lambda P + Q \in E$. Or $(\lambda P + Q)(0) + (\lambda P + Q)'(0) = \lambda P(0) + Q(0) + \lambda P'(0) + Q'(0) = \lambda(P(0) + P'(0)) + (Q(0) + Q'(0)) = \lambda \times 0 + 0 = 0$.
Donc $\lambda P + Q \in E$, et E est bien un sev de $\mathbb{R}[X]$.

2. $\left\{ x - y + 2z = 0 \right. \Leftrightarrow \left\{ x = y - 2z \right.$ d'où $E_1 = \{(y - 2z, y, z),\, y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,0) + z(-2,0,1), y, z \in \mathbb{R}\} = Vect((1,1,0), (-2,0,1))$ donc E_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en plus la famille $\{(2,1,0), (-1,0,1)\}$ est génératrice de E_1. Il reste à montrer qu'elle est libre : soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a(1,1,0) + b(-2,0,1) = (0,0,0)$.
Alors $(a - 2b, a, b) = (0,0,0)$ d'où $\left\{ \begin{array}{ll} a - 2b & = 0 \\ a & = 0 \\ b & = 0 \end{array} \right.$ càd $a = b = 0$.
Donc la famille $\{(1,1,0), (-2,0,1)\}$, libre et génératrice de E_1 est une base de E_1.

3. Comme de toute façon il faut trouver une base de E_2, il faut faire apparaître un Vect .. donc inutile de faire les 3 points avant ! On aura tout d'un coup, comme dans la question 2.
Pour arriver au Vect, il faut supprimer le "tel que". Posons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$.
Alors $P \in E_2 \Leftrightarrow P(0) = 0$ et $P(-1) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ c = -a + b \end{array} \right.$.
Finalement, $E_2 = \{aX^3 + bX^2 + (-a+b)X, a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(X^3 - X) + b(X^2 + X), a, b \in \mathbb{R}\} = Vect(X^3 - X, X^2 + X)$.
Donc E_2 est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\{X^3 - X, X^2 - X\}$ est une famille génératrice de E_3. De plus, comme elle est constituée de polynômes non-nuls de degrés 2 à 2 distincts, elle est libre.
Conclure : $\{X^3 - X, X^2 + X\}$ est donc une base de E_2.
Sans le raccourci pour le caractère libre : poser $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a(X^3 - X) + b(X^2 + X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Alors $aX^3 + bX^2 + (-a + b)X = 0_{\mathbb{R}[X]}$ d'où par identification des coefficients, $\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ -a + b = 0 \end{array} \right.$ càd $a = b = 0$.

Variante pour exprimer E_2 comme un vect : $P(0) = 0$ et $P(-1) = 0 \Leftrightarrow 0$ et -1 sont racines de $P \Leftrightarrow X(X+1)$ divise $P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = X(X+1)Q(X)$. Or $P \in \mathbb{R}_3[X]$, donc $deg(P) \leq 3$ donc $deg(Q) \leq 1$ et Q s'écrit $Q(X) = aX + b$.
Finalement, $E_2 = \{X(X+1)(aX+b), a, b, \in \mathbb{R}\} = \{aX^2(X+1) + bX(X+1), a, b \in \mathbb{R}\} = Vect(X^2(X+1), X(X+1))$.

4. Rappel : la méthode courte n'est pas de montrer séparément que la famille est libre puis génératrice puis de trouver les coordonnées. On utilise la proposition en montrant que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe un unique triplet de réels (λ, μ, ν) tels que $P(X) = \lambda \times 1 + \mu(X - 2) + \nu(X - 2)^2$.
Posons $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $P(X) = \lambda \times 1 + \mu(X - 2) + \nu(X - 2)^2$
$\Leftrightarrow aX^2 + bX + c = \nu X^2 + (-4\nu + \mu)X + (4\nu - 2\mu + \lambda) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \lambda - 2\mu + 4\nu & = c \\ \mu - 4\nu & = b \\ \nu & = c \end{array} \right.$. Le système est triangulaire avec 3 pivots non-nuls donc il est de Cramer, et il y a bien une unique solution. Donc la famille $(1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Coordonnées de $P(X) = X^2 + 2X + 2$: on pose $a = 1$ $b = c = 2$ dans le système précédent et on finit la résolution d'où $\left\{ \begin{array}{rl} \lambda - 2\mu + 4\nu & = 2 \\ \mu - 4\nu & = 2 \\ \nu & = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 10 \\ \mu = 6 \\ \nu = 1 \end{array} \right.$ Finalement, $X^2 + 2X + 2 = 10 \times 1 + 6(X - 2) + (X - 2)^2$.

Pour ceux qui ont fait la méthode "longue", attention de bien montrer génératrice + libre, et pas seulement génératrice !
$Vect(1, X - 2, (X - 2)^2) = Vect(1, X, X^2 - 4X) = Vect(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$
(Surtout ne pas faire comme moi, et bien marquer les opérations que vous avez effectuées sur le vect ! !).
Donc la famille $\{1, X - 1, (X - 1)^2\}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
Attention ce n'est pas parce que vous arrivez dans le Vect à $(1, X, X^2)$ qui est la base canonique donc une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ que votre famille **de départ** est libre ! En effet, dans le Vect on supprime les redondants ... donc les familles d'arrivée dans un Vect sont presque toujours libres ... mais pas forcément les familles de départ.
Ici pour justifier que la famille $(1, X - 2, (X - 2)^2)$ est libre, soit on remarque les degrés deux à deux distincts, soit on passe par le système (identification des formes canoniques).
Pour les coordonnées de $P(X) = X^2 + 2X + 2$: pas d'alternative à la résolution du système ci-dessus.