Eléments de correction du devoir maison 9

Question : X est une variable finie, donc d'après la formule de transfert, 3^X admet une espérance et $E(3^X) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)} 3^k P(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3p)^k (1-p)^{n-k} = (3p+1-p)^n = (2p+1)^n$ d'après le binôme.

Exercice : $\longrightarrow$ introduire les événements P_i, F_i ...

1. (a) La case n est particulière car 2 conditions d'arrêt ! Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $(T_n = k) = F_1 \cap \cdots F_{k-1} \cap P_k$ et d'après la formule des probabilités composées (à écrire), $P(T_n = k) = q^{k-1}p$, avec $q = 1-p$.
   $(T_n = n) = [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap F_n] \cup [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n] = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}$ d'où $P(T_n = n) = q^{n-1}$.
   (b) $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} P(T_n = k) + P(T_n = n)$ (relation de Chasles) $= (\sum\limits_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}) + q^{n-1} = (p\sum\limits_{j=0}^{n-2} q^j) + q^{n-1} = (p\frac{1-q^{n-1}}{1-q}) + q^{n-1} = (1-q^{n-1}) + q^{n-1}$ (car $1-q = p$) $=1$.
   Autre argument : $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$, donc $\{(T_n = k), k \in [\![1, n]\!]\}$ est un s.c.e donc $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   (c) Pour $x \neq 1$, le polynôme $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x^k$ vaut $P_n(x) = \frac{x-x^n}{1-x}$. P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \neq 1$ $P_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(1-nx^{n-1})(1-x)+(x-x^n)}{(1-x)^2} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$. Ou partir de $R_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ de même dérivée ... (puisque la dérivée du terme 1 vaut 0).
   (d) T_n est une variable finie donc admet une espérance et
   $E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} kP(T_n = k) + nP(T_n = n)$ (relation de Chasles) $= p\sum\limits_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1} = p\frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{(1-q)^2} + nq^{n-1} = \frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q} + \frac{nq^{n-1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-nq^{n-1}+nq^n-q^n+nq^{n-1}-nq^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q}$.
2. $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ (donc X_n suit une loi de bernoulli) et $(X_n = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ d'où $P(X_n = 0) = q^n$.
   On en déduit que $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - q^n$ puis que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. (a) $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(Y_n = k)$ se réalise ssi l'expérience finit par un pile : $(Y_n = k) = F_1 \cap ... \cap F_k \cap P_{k+1}$ et $P(Y_n = k) = q^k p$. Et $(Y_n = n) = F_1 \cap ... \cap F_n$ d'où $P(Y_n = n) = q^n$.
   (b) Un lancer donne soit pile soit face d'où $T_n = X_n + Y_n$ et $Y_n = T_n - X_n$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = (1-q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = (1-q^n)\frac{q}{1-q}$

Eléments de correction du devoir maison 9

Question : X est une variable finie, donc d'après la formule de transfert, 3^X admet une espérance et $E(3^X) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)} 3^k P(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3p)^k (1-p)^{n-k} = (3p+1-p)^n = (2p+1)^n$ d'après le binôme.

Exercice : $\longrightarrow$ introduire les événements P_i, F_i ...

1. (a) La case n est particulière car 2 conditions d'arrêt ! Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $(T_n = k) = F_1 \cap \cdots F_{k-1} \cap P_k$ et d'après la formule des probabilités composées (à écrire), $P(T_n = k) = q^{k-1}p$, avec $q = 1-p$.
   $(T_n = n) = [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap F_n] \cup [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n] = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}$ d'où $P(T_n = n) = q^{n-1}$.
   (b) $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} P(T_n = k) + P(T_n = n)$ (relation de Chasles) $= (\sum\limits_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}) + q^{n-1} = (p\sum\limits_{j=0}^{n-2} q^j) + q^{n-1} = (p\frac{1-q^{n-1}}{1-q}) + q^{n-1} = (1-q^{n-1}) + q^{n-1}$ (car $1-q = p$) $=1$.
   Autre argument : $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$, donc $\{(T_n = k), k \in [\![1, n]\!]\}$ est un s.c.e donc $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   (c) Pour $x \neq 1$, le polynôme $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x^k$ vaut $P_n(x) = \frac{x-x^n}{1-x}$. P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \neq 1$ $P_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(1-nx^{n-1})(1-x)+(x-x^n)}{(1-x)^2} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$. Ou partir de $R_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ de même dérivée ... (puisque la dérivée du terme 1 vaut 0).
   (d) T_n est une variable finie donc admet une espérance et
   $E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} kP(T_n = k) + nP(T_n = n)$ (relation de Chasles) $= p\sum\limits_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1} = p\frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{(1-q)^2} + nq^{n-1} = \frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q} + \frac{nq^{n-1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-nq^{n-1}+nq^n-q^n+nq^{n-1}-nq^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q}$.
2. $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ (donc X_n suit une loi de bernoulli) et $(X_n = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ d'où $P(X_n = 0) = q^n$.
   On en déduit que $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - q^n$ puis que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. (a) $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(Y_n = k)$ se réalise ssi l'expérience finit par un pile : $(Y_n = k) = F_1 \cap ... \cap F_k \cap P_{k+1}$ et $P(Y_n = k) = q^k p$. Et $(Y_n = n) = F_1 \cap ... \cap F_n$ d'où $P(Y_n = n) = q^n$.
   (b) Un lancer donne soit pile soit face d'où $T_n = X_n + Y_n$ et $Y_n = T_n - X_n$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = (1-q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = (1-q^n)\frac{q}{1-q}$