Devoir à la maison 1

à rendre au plus tard le lundi 14 septembre 2020

Exercice 1 :

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} - 3x - 1 = 0$.
2. Résoudre l'inéquation $|x^2 - 3x| \leq x - 2$.

Exercice 2 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$
et on pose f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer le signe de f.
   (c) Déterminer la limite de f à droite en 0 et à gauche en 1.
   (d) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{-x\ln x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)(\ln x)^2}$.
   (e) Montrer que pour tout $t \in]0,1[$, $t \ln t < 0$.
   (f) En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variations complet de f.
   (g) Dessiner l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.
2. (a) Résoudre l'équation (E_n) pour $n = 1$ et $n = 2$.
   (b) Soit $n \geq 1$. A l'aide d'une étude de fonction, montrer qu'il existe une unique solution $x_n \in [0, +\infty[$ à l'équation (E_n).
   (c) Vérifier que $0 < x_n < 1$.
   (d) Montrer alors que $f(x_n) = n$.
   (e) ** En déduire que $x_n < x_{n+1}$.
   (f) En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Devoir à la maison 1

à rendre au plus tard le lundi 14 septembre 2020

Exercice 1 :

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} - 3x - 1 = 0$.
2. Résoudre l'inéquation $|x^2 - 3x| \leq x - 2$.

Exercice 2 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$
et on pose f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer le signe de f.
   (c) Déterminer la limite de f à droite en 0 et à gauche en 1.
   (d) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{-x\ln x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)(\ln x)^2}$.
   (e) Montrer que pour tout $t \in]0,1[$, $t \ln t < 0$.
   (f) En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variations complet de f.
   (g) Dessiner l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.
2. (a) Résoudre l'équation (E_n) pour $n = 1$ et $n = 2$.
   (b) Soit $n \geq 1$. A l'aide d'une étude de fonction, montrer qu'il existe une unique solution $x_n \in [0, +\infty[$ à l'équation (E_n).
   (c) Vérifier que $0 < x_n < 1$.
   (d) Montrer alors que $f(x_n) = n$.
   (e) ** En déduire que $x_n < x_{n+1}$.
   (f) En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.