Devoir à la maison 10 — à rendre le lundi 8 février 2021

Exercice 1: *obligatoire*
Faire l'exercice 12 de la feuille 14 sur les intégrales de Wallis.
Dans cet exercice, toutes les méthodes sont classiques, mais les calculs sont parfois astucieux, notamment dans les questions 3. et 4. N'hésitez pas à me solliciter !

Exercice 2: *facultatif, plus difficile*

On pose pour $x \in \mathbb{R}^*$ $F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Etudier la parité de F.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\left|\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt\right| \leq \frac{2}{3x}$.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
   (c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. (a) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$. Montrer que $\cos(3x)\ln(3) \leq F(x) \leq \cos(x)\ln(3)$.
   (b) En déduire la limite de F en 0^+.
   F se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

Devoir à la maison 10 — à rendre le lundi 8 février 2021

Exercice 3: *obligatoire*
Faire l'exercice 12 de la feuille 14 sur les intégrales de Wallis.
Dans cet exercice, toutes les méthodes sont classiques, mais les calculs sont parfois astucieux, notamment dans les questions 3. et 4. N'hésitez pas à me solliciter !

Exercice 4: *facultatif, plus difficile*

On pose pour $x \in \mathbb{R}^*$ $F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Etudier la parité de F.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\left|\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt\right| \leq \frac{2}{3x}$.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
   (c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. (a) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$. Montrer que $\cos(3x)\ln(3) \leq F(x) \leq \cos(x)\ln(3)$.
   (b) En déduire la limite de F en 0^+.
   F se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

Devoir à la maison 10 — à rendre le lundi 8 février 2021

Exercice 5: *obligatoire*
Faire l'exercice 12 de la feuille 14 sur les intégrales de Wallis.
Dans cet exercice, toutes les méthodes sont classiques, mais les calculs sont parfois astucieux, notamment dans les questions 3. et 4. N'hésitez pas à me solliciter !

Exercice 6: *facultatif, plus difficile*

On pose pour $x \in \mathbb{R}^*$ $F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Etudier la parité de F.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\left|\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt\right| \leq \frac{2}{3x}$.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
   (c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. (a) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$. Montrer que $\cos(3x)\ln(3) \leq F(x) \leq \cos(x)\ln(3)$.
   (b) En déduire la limite de F en 0^+.
   F se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?