Devoir à la maison 12

à rendre au plus tard le mardi 23 mars 2021

option plus facile : question + exercice 1 + exercice 2 questions 1-3
option plus difficile : exercice 1 + exercice 2 en entier

Question :
Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{3n^2+1}{2^{n-1}}$ converge et déterminer la valeur de sa somme. On simplifiera le résultat.

Exercice 1:
Dans tout l'exercice x désignera un réel appartenant à l'intervalle $[0,1[$.

1. Pour tout $t \in [0,x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.
2. En déduire que $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
3. Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
4. En déduire que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ converge et déterminer la valeur de sa somme.
5. Après avoir vérifié que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2:
On pourra utiliser sans justification que $x + \ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1, w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Montrer que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
   (b) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel noté γ et appelé constante d'Euler.
2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0,+\infty[$.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$: $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$, puis que $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2}$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante. On admettra qu'elle est minorée par 0 donc convergente.
5. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$.
   indication : on pourra remarquer que $\sum_{k=1}^{2n} \ldots = \sum_{\substack{k=1\\ k\,pair}}^{2n} \ldots + \sum_{\substack{k=1\\ k\,impair}}^{2n} \ldots$
   (b) En déduire que $S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$
6. Démontrer alors que : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$