

Devoir à la maison 13

à rendre le mardi 6 avril 2021

Une pièce truquée donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p \in]0, 1[$. Dans toute la suite, on conviendra de représenter pile par 1 et face par 0. Le but est de proposer une expérience qui "rééquilibre" la pièce.

Question préliminaire :

On lance deux fois la pièce et on note A l'événement "obtenir deux résultats identiques". Déterminer la probabilité $a = P(A)$.

L'expérience est constituée de parties successives. Chaque partie consiste à lancer la pièce deux fois.

- Si à l'issue d'une partie, on obtient deux résultats identiques, on refait une partie.
- Si à l'issue d'une partie, on obtient deux résultats différents, on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.

L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'expérience se termine.

- (a) Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function y=lancer(p)` qui renvoie un lancer de pièce.
(b) Ecrire alors un script Scilab qui simule la variable aléatoire T , après avoir demandé p à l'utilisateur.
- Donner l'ensemble des valeurs prises par T . En déduire $P(T = 2k + 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $P(T = 2k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On pourra laisser le résultat en fonction de a .
- Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = 2k) = 1$. Qu'en déduit-on ?
- Déterminer l'espérance de T , puis la variance de T .
- ** On introduit R la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience. Montrer que $R \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.
On pourra appliquer à $(R = 1)$ la formule des probabilités totales avec comme s.c.e. $(T = 2k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Pour ceux qui veulent en faire plus : exercice 1, DM 11 année 2014-15.

Devoir à la maison 13

à rendre le mardi 6 avril 2021

Une pièce truquée donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p \in]0, 1[$. Dans toute la suite, on conviendra de représenter pile par 1 et face par 0. Le but est de proposer une expérience qui "rééquilibre" la pièce.

Question préliminaire :

On lance deux fois la pièce et on note A l'événement "obtenir deux résultats identiques". Déterminer la probabilité $a = P(A)$.

L'expérience est constituée de parties successives. Chaque partie consiste à lancer la pièce deux fois.

- Si à l'issue d'une partie, on obtient deux résultats identiques, on refait une partie.
- Si à l'issue d'une partie, on obtient deux résultats différents, on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.

L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'expérience se termine.

- (a) Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function y=lancer(p)` qui renvoie un lancer de pièce.
(b) Ecrire alors un script Scilab qui simule la variable aléatoire T , après avoir demandé p à l'utilisateur.
- Donner l'ensemble des valeurs prises par T . En déduire $P(T = 2k + 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $P(T = 2k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On pourra laisser le résultat en fonction de a .
- Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = 2k) = 1$. Qu'en déduit-on ?
- Déterminer l'espérance de T , puis la variance de T .
- ** On introduit R la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience. Montrer que $R \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.
On pourra appliquer à $(R = 1)$ la formule des probabilités totales avec comme s.c.e. $(T = 2k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Pour ceux qui veulent en faire plus : exercice 1, DM 11 année 2014-15.