Devoir à la maison 4 à rendre le mardi 3 novembre 2020

L'incontournable : exercice 1, exercice 2, exercice 3 question 1, exercice 4 questions de 1 à 3.

Exercice 1

On définit la fonction f par $f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Donner le signe de f sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
   La fonction f se prolonge-t-elle par continuité en 1 ?
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
5. On introduit $\varphi : x \mapsto x - 1 - x\ln x$. Dresser le tableau de variations complet de φ sur $]0, +\infty[$.
6. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathcal{D}$.
7. Représenter graphiquement l'allure de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Soit la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On note également $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n puis en déduire l'expression de b_n en fonction de n, λ_1 et λ_2.
3. Pour tout entier n non-nul, exprimer a_n en fonction de n, λ_1 et λ_2.

Exercice 3 *plus abstrait*

Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ MD = DM\}$.

1. Déterminer les matrices de E.
2. On considère l'équation $M^2 - M + D = 0$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de solutions M telles que M soit diagonale.
   (b) Montrer, sans calculs de tableaux, que si M est solution, alors $M \in E$.
   (c) ** Montrer qu'il existe une infinité de solutions à cette équation.

Exercice 4

On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Ecrire un programme (ou une fonction) Scilab, qui demande un entier n à l'utilisateur et renvoie la valeur u_n.
2. (a) Montrer que cette suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   Cette question n'a pas toujours été bien rédigée dans le DM 3. N'hésitez pas à regarder le corrigé du DM 3 avant de recopier votre rédaction au propre !
   (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
   (c) Montrer alors que la suite u diverge, puis préciser sa limite.
3. (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$. *On cherchera deux méthodes.*
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2n + 1$. Retrouver la limite de la suite u.
4. *facultatif, un peu plus difficile*
   (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
   (b) En admettant que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$, établir que, pour tout entier $n \geq 3$: $u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.
   (c) En déduire finalement que $u_n^2 \sim 2n$ quand $n \to +\infty$, puis donner un équivalent de u_n.

Pour ceux qui veulent en faire encore plus : revenir sur les dernières feuilles d'exercices et faire les exercices non faits en classe (notamment le dernier exercice des suites, les exercices 11, 14 et 15 des matrices etc.)