

Deux options selon vos besoins :

Si vous avez encore des difficultés dans l'étude des fonctions, je vous conseille l'option 1 : exercice 1 + exercice 2 et *en autonomie* refaire l'exercice 4 du DS 2.

Sinon, je vous conseille l'option 2 : exercice 1 + exercice 3 et *en autonomie* regarder l'exercice 2 de ce DM pour s'entraîner à calculer, ou refaire l'exercice 4 du DS 2.

Exercice 1: Pour tous

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, et on ajoute une boule de la couleur qui vient d'être tirée avant le tirage suivant.

1. Introduire des événements adaptés à l'expérience.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
3. Soit A_n l'événement "on n'obtient que des boules noires lors des n tirages".
Décrire l'événement A_n puis calculer $P(A_n)$.
4. Même question avec l'événement C_n "on obtient exactement une blanche au cours des n tirages".
5. Soit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, T_k "on obtient la première boule blanche au k^{ie} tirage".
 - (a) Calculer $P(T_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (ne pas oublier de commencer par décrire les événements).
 - (b) Justifier que pour tout $k \geq 1$: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Vérifier alors par le calcul que $\sum_{k=1}^n P(T_k) + P(A_n) = 1$.
Comment aurait-on pu faire autrement ?

Exercice 2: option 1

1. (a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$. Déterminer le signe de g .
(b) Déterminer les limites de g au voisinage de $\pm\infty$.
2. On introduit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .
 - (b) Déterminer les limites de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
 - (c) Dresser la tableau de variations complet de f .
 - (d) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) - x = f(-x)$. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathcal{D}$.
3. On introduit la suite u définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Ecrire une fonction Scilab qui prend en argument n et u_0 et qui renvoie la valeur de u_n .
 - (b) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
 - (c) Montrer que la suite u converge.
 - (d) En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite u converge vers 0.

Exercice 3: option 2

On considère l'ensemble E des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X+2) = P(X^2)$. Dans tout l'exercice, P désigne un élément de E , et $r \in \mathbb{C}$ une racine de P .

1. Montrer que r^2 est racine de P .
2. On suppose dans cette question que $r \neq 0$ et $|r| \neq 1$.
 - (a) A l'aide de la question 1., montrer que P admet une infinité de racines.
 - (b) Que peut-on en conclure sur P ?
3. Dans cette question, on suppose que P n'est pas le polynôme nul.
 - (a) Que peut-on en déduire sur r ?
 - (b) Montrer que $(r-2)^2$ est racine de P .
 - (c) Montrer alors que r ne peut pas être nul.
 - (d) Montrer que : $|r| = |(r-2)^2| = 1$.
 - (e) En déduire que la seule racine possible de P est 1.
vous pouvez commencer par le cas où $r \in \mathbb{R}$, avant de montrer le résultat lorsque $r \in \mathbb{C}$...
4. Proposer alors une forme de P , dans le cas où P n'est pas le polynôme nul.
5. Déterminer alors l'ensemble E .