Devoir à la maison 9 à rendre le lundi 18 janvier 2021

Question
Soit X une variable suivant la loi binomiale de paramètre n et p.
Déterminer l'espérance de 3^X.

Exercice
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$.
On lance la pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
• Soit si l'on a obtenu "Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = n$, la probabilité de $P(T_n = k)$.
   (b) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   Comment aurait-on pu justifier autrement ?
   (c) Montrer que pour $x \neq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$.
   (d) Etablir que T_n admet une espérance et vérifier que $E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}$.
2. Donner la loi de X_n et vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. (a) Donner la loi de Y_n.
   (b) Ecrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n puis en déduire $E(Y_n)$.

Devoir à la maison 9 à rendre le lundi 18 janvier 2021

Question
Soit X une variable suivant la loi binomiale de paramètre n et p.
Déterminer l'espérance de 3^X.

Exercice
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$.
On lance la pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
• Soit si l'on a obtenu "Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = n$, la probabilité de $P(T_n = k)$.
   (b) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   Comment aurait-on pu justifier autrement ?
   (c) Montrer que pour $x \neq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$.
   (d) Etablir que T_n admet une espérance et vérifier que $E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}$.
2. Donner la loi de X_n et vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. (a) Donner la loi de Y_n.
   (b) Ecrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n puis en déduire $E(Y_n)$.