

Généralités

- Comment montrer qu'une inégalité est vraie?
 par construction (via \Rightarrow)
 on cherche le signe de la différence
 (et si besoin, on pose une fonction)
- Comment montrer qu'une équation admet une unique solution?

résolution à la main (via \Leftrightarrow)
 on pose une fonction et on étudie sa bijectivité (on ne trouve pas explicitement la solution)

Fonctions

- Comment montrer qu'une fonction est continue? dérivable?
 en un point : calcul d'une limite
 C: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 D: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$
 sur un intervalle sans point à pb : phrase bla bla
- Comment démontrer la bijectivité d'une fonction? Comment déterminer la réciproque?
 si monotone + cont \rightarrow trouver g tq $g \circ f = f \circ g = id$
 on résout $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \dots$, y fixé
- Comment trouver un équivalent (3 méthodes)?
 si +, supprimer les négligeables ; via les équivalents usuels ; en cachemari
- Comment s'interprète graphiquement une limite? un équivalent?
 asymptotes, ...
 "se comporte comme"
 une fonction continue? une fonction dérivable?
 on ne lève pas le stylo
 courbe régulière (pas de bec ∇), tangentes

Suites

- Comment montrer qu'une suite converge (distinguer plusieurs cas)? connaît-on alors sa limite?
 si forme explicite, via le déf (limite finie)
 via un encadrement
 limite connue
 • majorée ou minorée
 • suites adjacentes
 limite non connue
- Comment étudier les suites implicites?
 on passe par les images (\rightarrow encadrement sur les images) puis on applique f^{-1} pour revenir aux antécédents

Séries

- Comment montrer qu'une série converge? si cv sans calcul : critères
 (ou séries alternées) si cv et calcul : cf 2.
- Comment montrer qu'une série converge et comment calculer la somme de la série?
 C.L. de séries de réf ou cas télescopique (passer alors S_n)

Probabilités

- Comment calculer $P(A \cup B)$? $P(A \cap B)$?
 si 2 à 2 incompatibles : +
 sinon cube
 si indépendance : \times
 sinon $P_A(B) \times P(A)$
 $P(\bigcup_{k=1}^n A_k)$? $P(\bigcap_{k=1}^n A_k)$?
 si 2 à 2 incorp: Σ
 multielle indép: Π ou probas composées
 $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n)$? $P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n)$?
 si 2 à 2 incorp \rightarrow la limite monotone
 (C // D)
- Comment obtenir une relation de récurrence sur les probas?
 formule des probabilités totales
- Comment déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète? (au moins 3 méthodes).
 reconnaître une loi usuelle
 via équi probas : $P(X=b) = \dots$
 via F_x
 introduit états élémentaires puis $(X=b) = \dots$
 relation type $Y = X + 1$
 via probas totales (couplet)
- Comment montrer qu'une variable aléatoire discrète admet une espérance? et une variance?
 si $X(n)$ fini cv, sinon cv absolue de $\sum k P(X=b)$
 calcul via $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Lien entre fonction de répartition et loi discrète :
 $F_x(m) = P(X \leq m) = \sum P(X=b)$
 $P(X=m) = P(X \leq m) - P(X \leq m-1) = F_x(m) - F_x(m-1)$
- Interpréter l'espérance, la variance, ainsi que les sauts (position et hauteur) de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète :
 esp: moyenne
 var: dispersion
 valeurs prises ($X(n)$)
 proba d'appart
 ($P(X=b)$)

7. Comment montrer qu'une variable est à densité? Comment obtenir une densité?
 Nq F_x est continue sur \mathbb{R} et C^1 sauf ... \downarrow calculer F_x'
 8. Si on connaît une densité de X , comment obtient-on la fonction de répartition?

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt + \text{découpages (si nécessaire)}$$

9. Comment montrer que f est la densité d'une variable aléatoire?
 $f \geq 0 + \int f \text{ cont sauf} + \int f \text{ cv et vaut } 1$

Intégration

1. Comment montrer qu'une intégrale impropre une fois converge? et impropre deux fois?
 si seulement cv: critères cv prol par continuité \downarrow couper l' \int en 2 ; si cv et calcul cf 2.
2. Comment calculer la valeur d'une intégrale sur un segment? d'une intégrale convergente?
 reconnaissance primitive // IPP // chgt de variable (si intégrale poss des lettres)
3. Comment obtient-on une inégalité sur une intégrale (sur un segment ou convergente)?
 construite une \leq sur l'intérieur puis intègre (si tout cv) Δ bon sens dans le bon sens
4. Comment obtient-on une relation de récurrence sur les suites d'intégrales (idem)?
 IPP
5. Comment s'étudie $x \mapsto \int_c^x f(t) dt$ où c est une constante?
 th fondamental: si f continue ..., unique primitive qui s'annule enc ...
6. Comment s'étudie $x \mapsto \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt$?
 si f continue sur ..., introduire F primitive de f $\text{d'où} = [F(t)]_{h(x)}^{g(x)} = \dots$

Matrices

1. Donner deux règles de calcul, vraies dans les réels, mais fausses dans les matrices: $AB=0 \neq A=0$ ou $B=0$
 $AB \neq BA$ en gnl
2. Comment montrer qu'une matrice est inversible? Comment déterminer son inverse?
 • via la déf: trouver B tq $AB=I$ • via un sys: $AX=0$ si A^{-1} non demandé
 alors $B=A^{-1}$ $AX=Y$ si A^{-1} demandé
 (x, y matrices colonnes)
3. Comment calculer A^n ? (distinguer plusieurs cas).
 si A diag \rightarrow cours ; sinon par réc ou via Bihône de Newton
 ($A = I + J \dots$)

Algèbre linéaire

1. Comment montrer qu'un sous-ensemble (d'un espace vectoriel de référence) est un sev? (2 méthodes)
 par les 3 \odot ou transposer (via résolution) jusqu'à faire apparaître $\text{Vect}(\dots)$
2. Comment trouver une base d'un sev du type $E = \{\dots \in \dots | \dots\}$?
 résoudre d'un sys: transposer E sans le tel que pour passer à la forme $\text{Vect}(\dots)$
 puis vq la famille obtenue est libre.
3. Comment montrer qu'une famille de vecteurs de E est une base de E ? et si E est de dimension n ?
 via prop: $\forall \vec{x} \in E \exists ! \dots$ via déf (libre et gén.) bon cardinal + libre ou gén.
4. Comment montrer qu'une application de E dans F est linéaire?
 poser \vec{x}, \vec{y} et $\lambda \in \mathbb{R}$ et mg $f(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
5. Comment déterminer le noyau d'une application linéaire? l'image (2 méthodes)?
 en résoudre $f(\vec{x}) = \vec{0}$ en posant $\vec{x} = \dots$ $\text{Im } f = \text{Vect}(\dots)$ (ou via la compatibilité d'un système)
6. Comment montrer qu'une application linéaire de E dans F est injective? surjective? bijective?
 Et en dimension finie?
 remarquer via th du rang ou mg $f(\text{base}) = \text{base}$ $\left(\text{Ker } f = \{ \vec{0} \} \quad \text{Im } f = F \right) \rightarrow \text{inj} + \text{bij}$
 ou via $\text{mat}_B(f)$ inversible
7. Comment trouver la réciproque d'une application linéaire bijective?
 cf récto: en résoudre $f(\vec{x}) = \vec{y}$ d'inconnue $\vec{x} \in E$, avec $\vec{y} \in F$ fixée