## Corrigé de la partie à rendre du DM 10

### Questions :

1. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{n^2-3n+4}{2^{n+1}} = \frac{(n(n-1)+n)-3n+4}{2^{n+1}} = (n(n-1)-2n+4)(\frac{1}{2})^{n+1} = \frac{1}{8}[n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2}] - \frac{1}{2}n(\frac{1}{2})^{n-1} + 2(\frac{1}{2})^n$.
   On reconnaît une combinaison linéaire de 3 termes généraux de séries géométriques convergentes car $|\frac{1}{2}| < 1$.
   Donc par linéarité, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2-3n+4}{2^{n+1}}$ converge et la somme de la série vaut :
   $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-3n+4}{2^{n+1}} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n$. Les bornes de départ pour les deux premières sommes de séries sont les bonnes mais pas pour la 3e d'où par relation de Chasles (ou utiliser la formule généralisée, ou changer de variable $j = n-1$)
   $S = \frac{1}{8}\frac{2}{(1-(1/2))^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2} + 2(\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^0) = 2 - 2 + 2(\frac{1}{(1-1/2)} - 1) = 2.$

2. Première remarque : la série étudiée est définie pour tout $n \geq 2$.
   Méthode 1 : $\frac{1}{n^2\ln(n)} = o(\frac{1}{n^2})$ puisque $\frac{\frac{1}{n^2\ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Rédiger alors le critère de négligeabilité : penser à dire que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$, et que la série de Riemann $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ converge car $\alpha = 2 > 1$. Donc par critère de négligeabilité, la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2\ln n}$ converge.
   Méthode 2 : pour tout $n \geq 3$, $\ln(n) \geq 1$ donc $\frac{1}{\ln(n)} \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{n^2\ln(n)} \leq \frac{1}{n^2}$.
   Rédiger le critère par comparaison : comme la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ converge (blabla), donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\ln(n)n^2}$ converge.
   Vous pouviez bien sûr partir de $n = 3$ dans les séries de votre conclusion, mais cela est inutile, car la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes. D'où le "à partir d'un certain rang" du critère du cours.

   Variante* : Remarquer que $\frac{\ln(n)}{n^2} = o(\frac{1}{n^{3/2}})$ d'après les croissances comparées (faire le quotient !) puis rédiger le critère de négligeabilité comme ci-dessus.

### Exercice :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $X^k : x \mapsto x^k$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ : $deg(P) \leq n$. Alors $deg(3xP') = 1 + deg(P') \leq 1 + (n-1) = n$ et de même, $deg((x^2-1)P'') = 2 + deg(P'') \leq n$, donc par somme, $deg(\Phi(P)) \leq n$ et $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.
   Linéarité : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\Phi(\lambda P+Q) = 3x(\lambda P+Q)' + (x^2-1)(\lambda P+Q)''$ et par linéarité de la dérivation, $= 3x(\lambda P' + Q') + (x^2-1)(\lambda P'' + Q'') = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$. Ou écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(\lambda P+Q)(x) = 3x(\lambda P+Q)'(x) + (x^2-1)(\lambda P+Q)''(x) = ...$
2. En posant $P = X^0$, $P' = 0 = P''$ d'où $\Phi(X^0) = 0$ ; en posant $P = X^1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x$, donc $P'(x) = 1$ et $P''(x) = 0$ d'où $\Phi(X^1)(x) = 3x \times 1 + 0 = 3x$.
   De même, pour $k \geq 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(X^k)(x) = 3x(kx^{k-1}) + (x^2-1)(k(k-1)x^{k-2}) = k(k+2)x^k - k(k-1)x^{k-2}$, polynôme de degré $k$ car $k(k+2) \neq 0$.
3. Comme $(X^0, X^1, ..., X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ (donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$), $Im(\Phi) = Vect(\Phi(X^0), \Phi(X^1), ..., \Phi(X^n)) = Vect(0, 3x, ..., n(n+2)x^n - n(n-1)x^{n-2})$ ; on enlève le 0, et il reste une famille de polynômes non-nuls échelonnée en degrés donc libre. Donc $\{3x, ..., n(n+2)x^n - n(n-1)x^{n-2}\}$ est une base de $Im(\Phi)$.
   On en déduit que $Im(\Phi) \neq \mathbb{R}_n[x]$ ("il manque le 1") donc $\Phi$ n'est pas surjective. Pour cet argument, on verra qu'avec la dimension (le nouveau chapitre), c'est plus simple à rédiger !
4. Dans le calcul de $Im(\Phi)$, on a vu que $\Phi(X^0) = 0$ donc $X^0$ convient.
   En particulier, on en déduit que $\Phi$ n'est pas injective car $Ker(\Phi) \neq \{0\}$.
5. Posons $P : x \mapsto ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(P)(x) = 3x(2ax+b) + (x^2-1)(2a) = 8ax^2 + 3bx - 2a$.
   Alors par identification des coefficients $P \in Ker(\Phi) \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 0 \\ 3b = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow P : x \mapsto c$. Finalement, $Ker(\Phi) = \{P(x) = c, c \in \mathbb{R}\} = Vect(X^0)$. La famille $(X^0)$ est donc génératrice de $Ker(f)$ et elle est de plus libre (un seul vecteur non nul), donc est une base de $Ker(\Phi)$.

## Corrigé du travail libre du DM 10

### Fonctions et calcul

1. $g$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2} \leq 0$.
   $g$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \leq 0$.
2. Petite FI sur le terme $\frac{x}{1+x}$. Factoriser par le prépondérant : $g(x) = \frac{1}{1+1/x} - \ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
3. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions usuelles dérivables sur leur ensemble de définition et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x} = e^{-x}(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)) = e^{-x}g(e^x)$.
   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \in \mathbb{R}^+$, et pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $g(y) \leq 0$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(e^x) \leq 0$ et $f'(x) \leq 0$.
4. En $-\infty$ : poser $X = e^x \to 0$, alors $f(x) = \frac{1}{X}\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 1$ (limite usuelle). Ou par les équivalents usuels : comme $e^x \to 0$, $\ln(1+e^x) \underset{x\to-\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} e^{-x}e^x = 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$. Asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
   En $+\infty$, factorisation par le prépondérant : $f(x) = e^{-x}\ln(e^x(e^{-x}+1)) = e^{-x}(\ln(e^x) + \ln(e^{-x}+1)) = xe^{-x} + e^{-x}\ln(e^{-x}+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées (pour le premier terme, et pas de FI dans le second). Ou faire le même changement de variable $X = e^x \to +\infty$... (se ramener de toute façon aux croissances comparées).
5. $f$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection, $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = ]0,1[$.
   Donc (toujours d'après le théorème de la bijection), $f^{-1} : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ est bijective et strictement décroissante. En particulier, on en déduit que $\lim\limits_{y\to 0} f^{-1}(y) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to 1} f^{-1}(y) = -\infty$.
6. On pose $h(x) = f(x) - x$. Alors $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x) - 1 < -1 < 0$. Donc $h$ continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R}) = ]-\infty,+\infty[ = \mathbb{R}$ (Attention de bien recalculer les limites de $h$ : il n'y a pas de FI, une fois que l'on s'appuie sur les limites de $f$ trouvées précédemment) En particulier, comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ (par définition de la bijection). On a donc $\alpha = f(\alpha) \in ]0,1[$ (vu les valeurs prises par $f$). Ou sinon, vérifier $h(0) > 0$ et $h(1) < 0$ ...

### Matrices et applications linéaires :

1. (b) Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda I + \mu A + \nu A^2 = 0_3$. Alors $\begin{pmatrix} \lambda+\nu & \mu & \nu \\ & \dots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \dots & \end{pmatrix} \Leftrightarrow \nu = \mu = \lambda = 0$.
2. (a) Montrer tout d'un coup ! (inutile de passer par la méthode des 3 points) : $\mathcal{E} = \{aI + bA + cA^2, a, b, c \in \mathbb{R}\} = Vect(I, A, A^2)$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $(I, A, A^2)$ en est une famille génératrice. Comme elle est libre (1.(b)), c'est une base de $\mathcal{E}$.
   (b) Poser $M = aI + bA + cA^2 \in \mathcal{E}$. Alors $AM = aA + bA^2 + cA^3 = (2c+a)A + bA^2 \in \mathcal{E}$ (ou poser $M$ sous forme de tableau, et faire le calcul de $AM$ à la main)
3. (a) D'après 2.(b), $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ donc il suffit de montrer que $f$ est linéaire. Or soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $M, N \in \mathcal{E}$. Alors $f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$.
   (b) $(I, A, A^2)$ base de $\mathcal{E}$ (attention de ne pas prendre une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou je ne sais quoi d'autre), donc $Im(f) = Vect(f(I), f(A), f(A^2)) = Vect(A, A^2, A^3) = Vect(A, A^2, 2A) = Vect(A, A^2)$. Donc $(A, A^2)$ génératrice et libre (comme sous-famille de famille libre cf 1.(b)) donc base de $Im(f)$.
   Puis soit $M \in \mathcal{E}$. $f(M) = 0 \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow (2c+a)A + bA^2 = 0$ (reprendre le calcul du 2.(b)) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
   car $(A, A^2)$ famille libre (ou revenir à l'identification des coefficients, en écrivant toutes les matrices sous forme de tableau). Finalement $Kerf = \{-2cI + cA^2, c \in \mathbb{R}\} = Vect(-2I + A^2) = Vect(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix})$.Famille libre car un seul vecteur non nul.
   Puis $f$ n'est pas injective car $Ker(f) \neq \{O_3\}$ et pas surjective car $Im(f) \subsetneq \mathcal{E}$ (pour justifier ce dernier résultat, on verra dans le prochain chapitre un "vrai" argument : pour l'instant, cela me suffit que vous le visualisiez, voire que vous comptiez le nombre de vecteurs dans une base .... ici une base de $Im(f)$ compte 2 vecteurs, alors qu'une base de $\mathcal{E}$ en compte 3 !)
   (c) $\forall M \in \mathcal{E}$, $f \circ f \circ f(M) = f \circ f(AM) = f(A^2M) = A^3M = 2AM = 2f(M)$ d'où $f \circ f \circ f = 2f$.
4. Soit $M = aI + bA + cA^2 \in \mathcal{E}$. Alors $AM = I + A^2 \Leftrightarrow (2c+a)A + bA^2 = I + A^2$
   $\Leftrightarrow -I + (2c+a)A + (b-1)A^2 = 0_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0 \\ 2c + a = 0, \quad b - 1 = 0 \end{cases}$ car $(I, A, A^2)$ est une famille libre.
   Ou écrire tout sous forme de tableaux.
   ccl : $\mathcal{S} = \varnothing$

### Pour aller plus loin

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $u(\lambda P + Q) = (\lambda P(a) + Q(a), \lambda P(b) + Q(b), \lambda P(c) + Q(c))$
   $= \lambda(P(a), P(b), P(c)) + (Q(a), Q(b), Q(c)) = \lambda u(P) + u(Q)$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. $P \in Ker(u) \Leftrightarrow u(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow P(a) = 0 = P(b) = P(c) \Leftrightarrow a, b, c$ sont 3 racines distinctes de $P \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[x]}$ car $deg(P) \leq 2$. Donc $Ker(u) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$ et $u$ est injective.

3. Posons pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, $X^k : x \mapsto x^k$. Alors $Im(u) = Vect(u(X^0), u(X), u(X^2)) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4))$
$= Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,0,1))$ car $\frac{1}{2}((0,1,4)-(0,1,2)) = (0,0,1)$
$= Vect(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$ car $(0,1,2) - 2*(0,0,1) = (0,1,0)$
$= Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$ car $(1,1,1)-(0,1,0)-(0,0,1) = (1,0,0)$ donc $u$ est surjective.
OU via la compatibilité d'un système (ne pas aller jusqu'à la résolution !!), pour mq que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe bien $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $u(P) = (x,y,z)$ (définition de la surjection, que l'application soit linéaire ou non).
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Mq il existe $P : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que
$\begin{cases} P(0) = x \\ P(1) = y \\ P(2) = z \end{cases}$. Or $\begin{cases} \gamma & = x \\ \alpha+\beta+\gamma & = y \\ 4\alpha+2\beta+\gamma & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = y \\ -2\beta-3\gamma & = z-4y \\ \gamma & = x \end{cases}$ système compatible car de Cramer. Donc $u$ est surjective.

4. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange (cf DM 4).
a) Analyse : soit $A$ un polynôme qui convient. Alors $A$ est de degré au plus 2, et $b$ et $c$ sont deux racines distinctes, donc $(x-b)(x-c)$ divise $A$ et il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = (x-b)(x-c)Q(x)$. Or $deg(A) \leq 2 \Rightarrow deg(Q) \leq 0$ d'où $Q(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ et $A(x) = \alpha(x-b)(x-c)$. Puis $A(a) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$.
Un unique candidat : $A : x \mapsto \frac{1}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)$.
Synthèse immédiate : ce polynôme convient bien car $A \in \mathbb{R}_2[x]$, $A(a) = 1$ et $A(b) = 0 = A(c)$.
b) De même, on trouve $B : x \mapsto \frac{1}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c)$ et $C : x \mapsto \frac{1}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-c)$.

5. a) Soit $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda A + \mu B + \nu C = 0_{\mathbb{R}[X]}$.Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda A(x) + \mu B(x) + \nu C(x) = 0$.
D'habitude, dans les polynômes, on écrit tout sous forme canonique puis on identifie les coefficients ... pour trouver finalement $\lambda = \mu = \nu = 0$. Ici, on a $A, B, C$ sous forme factorisée donc c'est long. Astuce : on utilise le même raisonnement que pour les familles libres de fonctions. On a 3 inconnues, donc 3 "bonnes" équations suffisent.
En $x = a$ on obtient : $\lambda A(a) + \mu B(a) + \nu C(a) = 0$ càd $\lambda = 0$.
De même, en $x = b$ puis en $x = c$, on trouve $\mu = 0 = \nu$.
b) Trouvons les (uniques) $(\alpha,\beta,\gamma)$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x)$. Même astuce : 3 inconnues, donc il faut 3 équations : on regarde en $x = a$, puis $x = b$ et $x = c$. On trouve $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$ et $\gamma = P(c)$. Finalement tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ s'écrit $P = P(a)A + P(b)B + P(c)C$.

**Intégration**

1. Posons $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle $[x, 2x]$, avec $x \in \mathbb{R}$. Donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. (En effet, $f(x)$ existe si $g$ est continue sur $[x, 2x]$)

2. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}}$ et $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$. Posons $u = -t$, avec $t \mapsto -t$ $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $du = -dt$, et $t = -x \Rightarrow u = x$, $t = -2x \Rightarrow u = 2x$. D'où $f(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-du) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du = -f(x)$.
$f$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

3. Posons $G$ une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$ ($G$ existe car $g$ continue sur $\mathbb{R}$) : en particulier $G$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $G' = g$. Alors par définition de l'intégrale $f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$, d'où $f$ est $C^1$ comme somme et composée de fonctions $C^1$ et $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

4. (a) Pour tout $t > 0$, $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$ d'où $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{t^2+1} \geq \frac{1}{(t+1)^2}$ et $\frac{1}{t} \geq g(t) \geq \frac{1}{t+1}$ (car $t > 0$).
Donc $\boxed{\text{pour } x > 0, \text{ comme } 2x > x,}$ on obtient $\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \geq f(x) \geq \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}dt$.
Il reste à calculer : $\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x)$ (car $x > 0$) $= \ln 2$ . De même pour l'autre côté.
(b) $\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln(\frac{2x+1}{x+1}) = \ln(\frac{2+1/x}{1+1/x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc (théorème d'encadrement) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{4x^2+4}-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}} > 0$. donc $f$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\boxed{\text{comme } f \text{ impaire, } f(0) = 0}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\ln 2$. (ou calculer $f(0) = ... = 0$)

6. 0 est solution, et est l'unique solution car $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln 2, \ln 2[$ (car continue et strictement croissante ...).
$\boxed{\text{Attention}}$, $\int_a^b f(t)dt = 0$ n'implique pas $a = b$ ou $\forall t \in [a,b], f(t) = 0$ ! (Seules les implications dans l'autre sens sont vraies : si $a = b$ alors l'intégrale est nulle etc.) Pour le visualiser, penser à une intégrale où les parties positives et négatives se compensent ...

7. (a) Résultat évident pour $x \geq 0$, et pour $x < 0$ faire la quantité conjuguée.
Ou par construction : $1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow -\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}$
$\Rightarrow 0 < x + \sqrt{x^2+1}$ (et $0 < \sqrt{x^2+1} - x$).
$\boxed{\text{Attention}}$, partir du résultat était problématique, car la 2e équivalence est fausse selon le signe de $-x$ (la fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ !)

(b) $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = g(x)$. D'où $G = h$ convient, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = h(2x) - h(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

8. *Pour aller plus loin*

   (a) Difficulté : mettre sous forme intégrale $x - f(x)$. Or $x = \int_x^{2x} 1dt$ (astuce ! $\int_x^{2x} 1dt = [t]_x^{2x} = 2x - x = x$), d'où par linéarité, $x - f(x) = \int_x^{2x} 1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$. Il reste à mettre au même dénominateur, puis faire la quantité conjuguée.

   (b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \leq \frac{1}{2}t^2$ d'où pour $x > 0$ : par croissance de l'intégrale avec $2x > x$,
   $0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} t^2 dt = \frac{1}{6}[t^3]_x^{2x} = \frac{7}{6}x^3$.
   On en déduit (pour $x > 0$) : $0 \leq 1 - \frac{f(x)}{x} \leq \frac{7}{6}x^2$, puis (théorème d'encadrement), $\frac{f(x)}{x} \to 1$ en $0^+$.

   (c) La seule chose qui change en $0^-$ : le sens des bornes ($2x < x$). On obtient donc $0 \geq x - f(x) \geq \frac{7}{6}x^3$.
   On conclut comme précédemment.

**Variables aléatoires finies :** programme python du DS 3 2020-21

```
def gain(n,p):
    X=rd.binomial(n,p,1)
    if (-1)**X==1:
        G=10*X
    else:
        G=-10*X
  return G
```

**Matrices et probabilités :**

1. Question calculatoire ... mais ca finit par sortir si l'on n'oublie pas l'hypothèse $p + q = 1$ !
2. D'après l'énoncé, à l'étape 0, deux boules noires sont placées sur la table donc $P(X_0 = 0) = 1$ et $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 0$. Puis une boule noire est enlevée. On note alors $B_1$ l'événement "on repose une boule blanche à l'étape 1". Alors $P(X_1 = 0) = P(\overline{B_1}) = q$, $P(X_1 = 1) = P(B_1) = p$ et $P(X_1 = 2) = 0$ car on ne change qu'une boule sur les deux, donc il reste forcément au moins une boule noire sur la table.
3. Sachant $(X_k = 0)$, deux boules noires sont posées sur la table donc au début de l'étape $k + 1$, une boule noire a été enlevée, et donc $(X_{k+1} = 0)$ est réalisée ssi une boule noire est reposée : d'où $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = q$, et $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 1) = p$, $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 2) = 0$.
   Sachant $X_k = 2$, deux boules blanches sont posées sur la table donc au début de l'étape $k+1$, une boule blanche a été enlevée, et donc $(X_{k+1} = 2)$ est réalisée ssi une boule blanche est reposée etc. : $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2) = p$, et $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = q$, $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 0) = 0$.
   Sachant $(X_k = 1)$, il y a une boule blanche et une noire sur la table. Pour que $(X_{k+1} = 0)$ soit réalisé, il faut que la boule noire soit retirée (une chance sur deux), et qu'une boule blanche soit posée : $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 0) = \frac{1}{2}q$ et par symétrie, $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{2}p$.
   Dans ces conditions, $(X_{k+1} = 1)$ est réalisé dans deux cas incompatibles : on enlève une blanche, et on repose une blanche ou l'on enlève une noire et on repose une noire : $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$ (ou faire 1- ...).
4. $\{(X_k = 0), (X_k = 1), (X_k = 2)\}$ forme un s.c.e.. D'après la formule des probabilités totales, $P((X_{k+1} = 0))$
   $= P(X_k = 0)P_{(X_k=0)}((X_{k+1} = 0) + P(X_k = 1)P_{(X_k=1)}((X_{k+1} = 0) + P(X_k = 2)P_{(X_k=2)}((X_{k+1} = 0)$
   $= qP(X = 0) + \frac{1}{2}qP(X_k = 1)$ et de même, on trouve
   $P(X_{k+1} = 1) = pP(X_k = 0) + \frac{1}{2}P(X_k = 1) + qP(X_k = 2)$, $P(X_{k+1} = 2) = \frac{p}{2}P(X_k = 1) + pP(X_k = 2)$.
   Il reste à faire le produit matriciel $MU_k$ pour constater qu'on trouve $U_{k+1}$.
5. Raisonnement par récurrence :
   *n=1* : ne pas oublier que le calcul $PD$ a déjà été fait ! et penser à réutiliser $p + q = 1$.
   Supposons que pour un certain $k$,
   $U_k = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $U_{k+1} = MU_k = MPD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = PDD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$ (par 1.) $= PD^{k+1} \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$.
6. Comme $D$ est une matrice diagonale, et que pour tout $k \geq 1$, $0^k = 0$, on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
   $U_k = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p(\frac{1}{2})^{k-1} \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Et on en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_k = 0) = pq(\frac{1}{2})^{k-1} + q^2$, $P(X_k = 1) = p(p-q)(\frac{1}{2})^{k-1} + 2pq$
   et $P(X_k = 2) = -p^2(\frac{1}{2})^{k-1} + p^2$.
   Comme $\frac{1}{2} \in ]0, 1[$, on trouve $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = 0) = q^2$, $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = 1) = 2pq$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = 2) = p^2$.