Corrigé du devoir maison 12

Exercice 1 :

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit les événements F_i "le rat choisi une fausse porte au i^e essai".

1. X est le temps d'attente du premier succès ("choisir la bonne porte") dans un processus sans mémoire : la probabilité de succès à chaque essai étant $\frac{1}{n}$ (n portes), on en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{n})$.
   Donc X admet une espérance et $E(X) = n$.
2. (a) $Y(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$, car le rat peut se tromper longtemps avant de choisir la bonne porte.
   $(Y = 1) = \overline{F}_1$ et plus généralement pour tout $k \geq 1$, $(Y = k) = F_1 \cap ... \cap F_{k-1} \cap \overline{F}_k$.
   D'après la formule des probabilités composées,
   $P(Y = k) = P(F_1)P_{F_1}(F_2)...P_{F_1\cap...\cap F_{k-2}}(F_{k-1})P_{F_1\cap...\cap F_{k-1}}(\overline{F}_k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times ... \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1}$ (en effet, au moment du k^{ie} essai, on a rajouté $k-1$ fausses portes donc il y a $2+k-1 = k+1$ portes dont une bonne).
   Produit télescopique : $P(Y = k) = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
   On vérifie alors (somme télescopique) : $\sum_{k=1}^{N} P(Y = k) = \sum_{k=1}^{N} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.
   Espérance : $\forall k \geq 1$, $kP(Y = k) \geq 0$, $\frac{1}{k} \geq 0$ et $kP(Y = k) = \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k}$. Or la série harmonique diverge, donc (critère d'équivalence) la série $\sum_{k\geq 1} kP(Y = k)$ diverge et Y n'admet pas d'espérance.

   (b)
```
n=2
k=1
while rd.random()>1/n       ou       while rd.randint(1,n+1)!=1       ou       ...
    k=k+1
    n=n+1
print(k)
```
   (on aurait pu réaliser que k et n étaient reliées pour n'utiliser qu'une seule variable au lieu de 2 ....)
3. *Facultatif :* $Z(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$ et pour $k \leq \ell$, $(Z = k) = F_1 \cap ... \cap F_{k-1} \cap \overline{F}_k$
   (mutuelle indépendance ou FPC, formule à écrire) $P(Z = k) = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{k-1}$.
   Pour $k > \ell$, la description ne change pas, mais le calcul des probabilités change !
   $(Z = k) = F_1 \cap ... \cap F_\ell \cap F_{\ell+1} \cap ... \cap F_{k-1} \cap \overline{F}_k$ Et d'après la formule des probabilités composées (à écrire) :
   $P(Z = k) = (1 - \frac{1}{n})^\ell (1 - \frac{1}{n-1})^{(k-1)-(\ell+1)+1} \frac{1}{n-1} = (1 - \frac{1}{n})^\ell (1 - \frac{1}{n-1})^{k-1-\ell} \frac{1}{n-1}$.
   D'où : $P(Z = k) = \begin{cases} \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{k-1} \text{ si } k \leq \ell \\ (1 - \frac{1}{n})^\ell (1 - \frac{1}{n-1})^{k-1-\ell} \frac{1}{n-1} \text{ si } k > \ell \end{cases}$
   Puis d'après la relation de Chasles $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z = k) = \sum_{k=1}^{\ell} P(Z = k) + \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} P(Z = k)$
   $= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\ell} (1 - \frac{1}{n})^{k-1} + (1 - \frac{1}{n})^\ell \frac{1}{n-1} \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n-1})^{k-1-\ell} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\ell-1} (1 - \frac{1}{n})^j + (1 - \frac{1}{n})^\ell \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n-1})^i$
   $= \frac{1}{n} \times \frac{1-(1-\frac{1}{n})^\ell}{1-(1-\frac{1}{n})} + (1 - \frac{1}{n})^\ell \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{1-(1-\frac{1}{n-1})} = 1 - (1 - \frac{1}{n})^\ell + (1 - \frac{1}{n})^\ell = 1$

Exercice 2 :

1. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{E, \bar{E}\}$,
   $P(U_1 \cap ... \cap U_n) = P(E)P_E(U_1 \cap ... \cap U_n) + P(\bar{E})P_{\bar{E}}(U_1 \cap ... \cap U_n)$.
   Or une fois le jeton choisi, les lancers sont mutuellement indépendants (autrement dit, les événements (U_k) sont mutuellement indépendants pour la probabilité P_E resp. $P_{\bar{E}}$)
   d'où $P(U_1 \cap ... \cap U_n) = \frac{1}{2}(P_E(U_1)...P_E(U_n)) + \frac{1}{2}(P_{\bar{E}}(U_1)...P_{\bar{E}}(U_n)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2} \times 1 = (\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{1}{2}$.
   Variante : utiliser la FPC plutôt que l'indépendance ce qui donne
   $P(U_1 \cap ... \cap U_n) = P(E)P_E(U_1)P_{E\cap U_1}(U_2)...P_{E\cap U_1\cap...\cap U_{n-1}}(U_n) + ...$
   Dernière rédaction possible (mais que j'aime moins) : description complète sans passer par la FPT
   $A = (E \cap U_1 \cap ... \cap U_n) \cup (\bar{E} \cap U_1 \cap ... \cap U_n)$ réunion de 2 évts incompatibles ....
2. On cherche $P_{U_1\cap...\cap U_n}(E)$. D'après la formule de Bayes, $P_{U_1\cap...\cap U_n}(E) = \frac{P(E)P_E(U_1\cap...\cap U_n)}{P(U_1\cap...\cap U_n)} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^{n+1}+\frac{1}{2}} \to 0$ car $|1/2| < 1$. Interprétation : sachant qu'on a eu beaucoup de 1, la proba d'avoir utilisé le jeton 1 devient quasi nulle. Ce qui est cohérent avec les résultats obtenus via le théorème de limite monotone : lorsqu'on utilise un jeton où les deux faces sont probables la probabilité de ne jamais obtenir l'une des deux faces est nulle.
3. $X(\Omega) = \{0\} \cup [\![1, +\infty[\![$ (1 phrase).
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X = n) = U_1 \cap ... \cap U_{n-1} \cap \overline{U}_n$. On réapplique la formule des probabilités totales comme dans la question 1., $P(X = n) = P(U_1 \cap ... \cap U_{n-1} \cap \overline{U}_n) = P(E)P_E(U_1 \cap ... \cap U_{n-1} \cap \overline{U}_n) + P(\bar{E})P_{\bar{E}}(U_1 \cap ... \cap U_{n-1} \cap \overline{U}_n)$ et par indépendance des lancers, une fois le jeton choisi, on obtient $P(X = n) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n + 0 = (\frac{1}{2})^{n+1}$.
4. $\{(X = n), n \in \mathbb{N}\}$ est un s.c.e d'où $P(X = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
   D'où $P(X = 0) = P(\bar{E})$, ce qui est prévisible puisque qu'on "sait" qu'avec le jeton 1, presque sûrement, on va

tomber sur la face 0 en un nombre fini de lancers. (donc sachant E, X ne prendra pas la valeur 0 p.s., mais sachant $\bar{E}$, $X = 0$)

5. Il faut étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} nP(X = n)$ ce qui revient à la convergence, car tous les termes sont positifs. Soit $n \geq 1$, alors $nP(X = n) = n(\frac{1}{2})^{n+1} = (\frac{1}{2})^2 \times n(\frac{1}{2})^{n-1}$ terme général d'une série géométrique dérivée convergente car $|1/2| < 1$. Donc X admet une espérance et d'après la relation de Chasles $E(X) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-1/2)^2} = 1$.
   Remarque, pour éviter le problème de rigueur en 0 (et donc la relation de Chasles etc.), on aurait pu remarquer que l'expression de $P(X = n)$ pour $n \geq 1$, restait vraie pour $P(X = 0)$! Ainsi, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (\frac{1}{2})^{n+1}$.
6. Etudions le moment d'ordre 2 de X.
   Méthode 1 : étudions la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} n^2P(X = n)$.
   pour $n \geq 1$, $n^2P(X = n) = n(n-1)P(X = n) + nP(X = n) = \frac{1}{8} \times n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2} + nP(X = n)$. On reconnait la somme de 2 termes généraux de séries de référence, donc X admet un moment d'ordre 2, et $E(X^2) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2P(X = n) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{(1-1/2)^3} + E(X) = 2 + 1 = 3$.
   Méthode 2 : étudier la convergence absolue (qui revient à la convergence) de la série $\sum_{n\geq 0} n(n-1)P(X = n)$ ce qui donne l'existence de l'espérance $E(X(X-1))$, puis utiliser la linéarité de l'espérance, pour en déduire que X admet un moment d'ordre 2, et $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$.
   Les calculs donnent $E(X(X-1)) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{(1-1/2)^3} = 2$.
   Conclusion, quelque soit la méthode, X admet un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = 3$.
   Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - 1 = 2$.
7. Fonctionnement du programme : `x` est une variable compteur, `jeton` cache le jeton que l'on choisit : 1 donne le jeton J_1 et 2 le jeton J_2. Puis si le jeton J_1 a été choisi, on lance une première fois ce jeton ... et on le relance tant qu'on n'a pas obtenu la face 0 : ce qui donne la valeur de X dans ce cas.
   Sinon (si le jeton J_2 a été choisi), on ne modifie pas `x`, qui renvoie alors la valeur 0 ... ce qui est également la valeur de X dans ce cas (puisqu'avec le jeton J_2, il est impossible d'obtenir la face 0, donc par définition, X prend la valeur 0). Bref, ce programme simule la variable aléatoire X.

Partie facultative :

8. (a) Sachant $\bar{E}$, Y prend la valeur 1 avec probabilité 1 donc la valeur 1 est particulière.
   D'après la formule des probabilités totales (toujours la même !),
   $P(Y = 1) = P(U_1) = P(E)P_E(U_1) + P(\bar{E})P_{\bar{E}}(U_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$.
   Puis $\forall n \geq 2$, $(Y = n) = \overline{U}_1 \cap ... \cap \overline{U}_{n-1} \cap U_n$ d'où $P(Y = n) = P(E)P_E(\overline{U}_1 \cap ... \cap \overline{U}_{n-1} \cap U_n) + 0 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n$ par indépendance des lancers une fois le jeton choisi.
   (b) Comme précédemment, puisque $\{(Y = k), k \in \mathbb{N}\}$ est un s.c.e., $P(Y = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1 - \frac{3}{4} - \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{n+1} = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
   (c) Le programme ressemble beaucoup à celui proposé pour X en remplaçant x par y. Vous pouvez bien sûr modifier la condition du while en mettant le contraire mais cela revient au même ! ! Par contre, il faut rajouter
   ```
   else :
   y=1
   ```
   à la fin, puisque si c'est le jeton 2 qui est choisi, Y renvoie la valeur 1 (alors que X renvoie la valeur 0). Plusieurs variantes sont bien sûr possibles.

9. Avant de rédiger la correction de l'exercice, voici la description classique d'un max et d'un min.
Posons comme ici, $S = max(X, Y)$ et $I = min(X, Y)$
Pour tout $n \in S(\Omega)$, $(S = n) = ((X = n) \cap (Y \leq n)) \cup ((X \leq n) \cap (Y = n))$ ou pour avoir des événements disjoints $(S = n) = ((X = n) \cap (Y < n)) \cup ((X < n) \cap (Y = n)) \cup ((X = n) \cap (Y = n))$.
C'est bien pour cette raison que dans le cas d'une expérience moins particulière que celle de cet énoncé, on regarde en général la fonction de répartition de S, puisqu'alors $(S \leq n) = (X \leq n) \cap (Y \leq n)$.

Pour le minimum, cela donne :
Pour tout $n \in I(\Omega)$, $(I = n) = ((X = n) \cap (Y \geq n)) \cup ((X \geq n) \cap (Y = n))$ ou pour avoir des événements disjoints $(I = n) = ((X = n) \cap (Y > n)) \cup ((X > n) \cap (Y = n)) \cup ((X = n) \cap (Y = n))$.
Là encore, si l'expérience est plus générale, on vous fera plutôt étudier $(I \geq n) = (X \geq n) \cap (Y \geq n)$.

L'idée ici, est de partir des descriptions ci-dessus, et de les simplifier au vu de notre expérience.

(a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $S(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Puis $(S = 1) = (X \leq 1) \cap (Y = 1)$ (puisque l'événement $(Y = 0)$ n'est pas probable). Mais on ne peut pas avoir pile et face en même temps donc $X \neq Y$, donc $(S = 1) = (X = 0) \cap (Y = 1) = (X = 0)$ puisque $(X = 0) \subset (Y = 1)$: en effet, presque sûrement $(X = 0) = \bar{E}$ et si c'est le jeton 2 qui est choisi, $Y = 1$.

(b) Soit $n \geq 2$. Alors $(S = n) = ((X = n) \cap (Y \leq n)) \cup ((X \leq n) \cap (Y = n))$.
Mais $(X = n) \cap (Y \leq n) = (X = n)$ puisque si X prend la valeur n, comme $n \geq 2$, cela signifie que l'on a eu le premier pile seulement au n^{ie} donc que l'on a eu des face jusque là donc que $Y = 1$. Donc $(X = n) \subset (Y = 1)$.
Donc $(X = n) \cap (Y \leq n) = (X = n)$. De même pour l'autre terme.

(c) Comme $X \neq Y$, $(S = n)$ est une réunion de 2 événements incompatibles donc pour $n \geq 2$,
$P(S = n) = P(X = n) + P(Y = n) = (\frac{1}{2})^{n+1} + (\frac{1}{2})^{n+1} = (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^{n-1}$
De plus, $S(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $P(S = 1) = \frac{1}{2}$ d'après (a).
Donc $S \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$. On en déduit que S admet une espérance et une variance, et $E(S) = 2$, $V(S) = \frac{1-1/2}{(1/2)^2} = 2$

10. $I(\Omega) = \{0, 1\}$. En effet, X prend la valeur 0 donc I aussi, et on a déjà vu que dès que X prenait une valeur $n \geq 2$, alors $Y = 1$ donc $I = 1$ et dès que Y prend une valeur $n \geq 2$, alors $X = 1$ donc $I = 1$. Bref I prend les valeurs 0 et 1 et ne peut pas prendre de valeurs $n \geq 2$.
Puis comme Y ne prend pas la valeur 0, $P(I = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$ d'où $P(I = 1) = 1/2$ et $I \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
Remarque : il était beaucoup moins facile de regarder $P(I = 1)$ donc soyez malins ! ......