## Corrigé du devoir maison 13

**Question :** $f : t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est doublement impropre.
Méthode 1 : remarquer que la fonction $f$ est impaire sur $\mathbb{R}$, donc si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ convergera et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.
Pour montrer la convergence, on peut par exemple remarquer qu'au voisinage de $+\infty$, $te^{-t^2} = o(e^{-t})$ ou $te^{-t^2} = o(\frac{1}{t^2})$ et rédiger le critère d'équivalence.

Méthode 2 : remarquer que l'on connait une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$, puisque $(e^{-t^2})' = -2te^{-t^2}$.
Posons $A < B$. Alors $\int_A^B te^{-t^2}dt = \frac{1}{-2}[e^{-t^2}]_A^B = -\frac{1}{2}(e^{-B^2} - e^{-A^2}) \underset{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$. (attention de bien réaliser que le carré porte sur $B$ et sur $A$ mais n'inclut pas le "moins" devant !)
Il reste à conclure !!

Méthode 3 : mixer les deux méthodes précédentes (à savoir utiliser l'imparité, mais le calcul d'une primitive pour étudier $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.)

**Exercice 1 :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $f_n : x \mapsto \frac{1}{(x^3+1)^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Or $\frac{1}{(1+x^3)^n} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(x^3)^n} = \frac{1}{x^{3n}}$. Comme les deux intégrandes (fonctions sous le signe intégral) sont continus et positifs, et que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3x}}dx$ converge puisque $3n > 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on déduit du critère d'équivalence que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^3+1)^n}dx$ converge. Enfin, comme $f_n$ est continue sur $[0, 1]$, on obtient la convergence de l'intégrale $I_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} - \frac{(1+x^3)}{(1+x^3)^{n+1}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{-x^3}{(1+x^3)^{n+1}}dx$. Or pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{-x^3}{(1+x^3)^{n+1}} \leq 0$, donc par positivité de l'intégrale (avec $0 \leq 1$), $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Donc la suite $(I_n)$ est décroissante. Pour des raisons analogues, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$, donc la suite $(I_n)$, décroissante et minorée par 0 converge.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le calcul précédent, $I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}dx$.
   Effectuons maintenant une IPP sur $I_n$. On pose $u'(x) = 1$, $v(x) = (1 + x^3)^{-n}$ d'où $u(x) = x$ et $v'(x) = -n3x^2(1 + x^2)^{n+1}$, avec $u, v$ $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$. D'où, pour $A > 0$,
   $\int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n}dx = [\frac{x}{(1+x^3)^n}]_0^A + 3n\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}dx = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}dx \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0 + 3n(I_n - I_{n+1})$ puisque l'intégrale converge et que $\frac{A}{(1+A^3)^n} \underset{A \to +\infty}{\sim} \frac{A}{A^{3n}} = \frac{1}{A^{3n-1}} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $3n - 1 > 0$.
   On obtient bien : $I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$ d'où la relation de récurrence (pour $n \neq 0$) : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}I_n$ $(*)$
4. Récurrence : pour $n = 2$, $I_1 \prod_{k=1}^{1} \frac{3k-1}{3k} = I_1 \times \frac{2}{3}$, or d'après la relation de récurrence $(*)$ on a bien $I_2 = \frac{2}{3}I_1$.
   Supposons alors que pour un certain entier $n \geq 2$, $I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$. Alors d'après la relation de récurrence,
   $I_{n+1} = \frac{3n-1}{n}I_n = (\frac{3n-1}{3n}\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k})I_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k}I_1$ (relation de Chasles pour le produit). Conclure.

**Exercice 1:**

1. Soit $x > 0$. Alors $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^{x+1}} = \frac{1}{1+t+e^{(x+1)\ln(t)}}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Il reste à montrer que l'intégrale converge. Or $\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ car $x + 1 > 1$ (nécessaire pour justifier que $t = o(t^{x+1})$ !) ou utiliser la comparaison $\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \frac{1}{t^{x+1}}$. Il reste à conclure avec le critère choisi, en remarquant que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}dt$ converge puisque $x + 1 > 1$.
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x \leq y$. Alors pour tout $t \geq 1$, comme $\ln(t) \geq 0$, $x\ln(t) \leq y\ln(t)$ d'où par croissance de l'exp, puis par somme $1 + t + e^{x\ln(t)} \leq 1 + t + e^{y\ln(t)}$, d'où $\frac{1}{1+t+t^y} \leq \frac{1}{1+t+t^x}$. Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans le bon sens, et toutes les intégrales en jeu étant convergentes, on obtient $f(y) \leq f(x)$.
   D'où $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. (a) Soit $x > 0$. On remarque que pour tout $t \geq 1$, $\frac{1}{t(1+t^x)} = \frac{1}{t+t^{x+1}} \sim \frac{1}{t^{x+1}}$. Pour les mêmes raisons qu'au 1. (aller vite !), on en déduit que $g(x)$ existe.
   (b) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1+t^x}{t(1+t^x)} - \frac{t^x}{t(1+t^x)} = \frac{1}{t(1+t^x)}$. Posons $A > 1$. Alors par linéarité, $\int_1^A \frac{1}{t(1+t^x)}dt = \int_1^A \frac{1}{t}dt - \int_1^A \frac{t^{x-1}}{1+t^x}dt = [\ln(|t|)]_1^A - [\frac{1}{x}\ln(|1 + t^x|)]_1^A = \ln(A) - \frac{1}{x}\ln(1 + A^x) + \frac{1}{x}\ln(2)$. Il reste à simplifier $\ln(A) - \frac{1}{x}\ln(1 + A^x)$ pour en trouver la limite : or $\ln(A) - \frac{1}{x}\ln(1 + A^x) = \frac{1}{x}(x\ln(A) - \ln(1 + A^x)) = \frac{1}{x}(\ln(A^x) - \ln(1 + A^x)) = \frac{1}{x}\ln(\frac{A^x}{1+A^x}) = \frac{1}{x}\ln(\frac{1}{1+1/A^x}) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\int_1^A \frac{1}{t(1+t^x)}dt \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln 2}{x}$. Ccl : $g(x) = \frac{\ln 2}{x}$.

(c) Soit $x>0$. Pour tout $t\geq 1$, $0\leq \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\leq \frac{1}{t+t^{x+1}}=\frac{1}{t(1+t^x)}$, d'où par croissance de l'intégrale (bornes dans le bon sens, intégrales toutes convergentes), $0\leq f(x)\leq g(x)$ d'où le résultat.
Théorème d'encadrement : $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) i. $\frac{\ln(2)}{x}-f(x)=g(x)-f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+t^{x+1}}-\frac{1}{1+t+t^{x+1}}dt=\int_1^{+\infty}\frac{1+t+t^{x+1}-(t+t^{x+1})}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})}dt=\int_1^{+\infty}\frac{1}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})}dt$.
Il reste à encadrer cette intégrale. Or pour tout $t\geq 1$, $0\leq \frac{1}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})}\leq \frac{1}{(t^{x+1})(t^{x+1})}=\frac{1}{t^{2x+2}}$.
On reconnait l'intérieur d'une intégrale de Riemann qui converge ($2x+2>1$), d'où par croissance de l'intégrale $0\leq g(x)-f(x)\leq \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2x+2}}dt=\frac{1}{2x+1}$.
En effet, pour $A>1$, $\int_1^A t^{-2x-2}dt=\frac{1}{-2x-1}[t^{-2x-1}]_1^A=\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+1}\frac{1}{A^{2x+1}}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2x+1}$ puisque $2x+1>0$.

ii. En renversant l'encadrement du (a) (cacher un côté puis l'autre), on trouve $\frac{\ln(2)}{x}-\frac{1}{2x+1}\leq f(x)\leq \frac{\ln(2)}{x}$.
Or $\frac{\ln(2)}{x}-\frac{1}{2x+1}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$, donc par comparaison $f(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$. Enfin, au vu de l'encadrement, on devine $f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{\ln(2)}{x}$. Montrons le. Comme $\frac{\ln 2}{x}>0$, on obtient (après simplication) $1-\frac{x}{(2x+1)ln(2)}\leq \frac{f(x)}{\ln 2/x}\leq 1$ d' où (th d'encadrement) $\frac{f(x)}{\ln 2/x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}1$ d'où l'équivalent $f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{\ln 2}{x}$.

(e) Il reste à mettre bout à bout les questions 2. 3.(c) et 4.(b).