## Corrigé du devoir maison 1

**Exercice 1 :**

L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Méthode 1 : si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} < 3 \Leftrightarrow 1 < 3x \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$ donc $\mathcal{S}_+ = ]\frac{1}{3}, +\infty[$ est ensemble solution dans ce cas.

Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0 < 3$ donc tout $x < 0$ est solution, donc $\mathcal{S}_- = ]-\infty, 0[$ est ensemble solution dans ce cas.

Finalement, l'ensemble solution de l'inéquation est $\mathcal{S} = \mathcal{S}_- \cup \mathcal{S}_+ = ]-\infty, 0[ \cup ]\frac{1}{3}, +\infty[$.

Méthode 2 : plus simple, car ne nécessite pas de disjonction de cas.

$\frac{1}{x} < 3 \Leftrightarrow 0 < 3 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{3x-1}{x}$. Il reste juste à faire un tableau de signes avec deux lignes (pour la première ligne : $3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$). Conclure.

**Exercice 2**

1. ici, les deux membres ne se ressemblent pas, donc partir sur la différence : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} > 0$ puisque $ab > 0$, et comme $a - b \neq 0$, $(a-b)^2 > 0$. Conclure.
2. Si de plus $a \neq 1$, on peut appliquer le 1. à $a$ et à $b = 1$, d'où le résultat.

**Exercice 3**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe ssi $\left(\ln(1+x) \text{ existe et } \frac{1}{1+x} \text{ existe}\right)$ ssi $\left(1 + x > 0 \text{ et } 1 + x \neq 0\right)$. D'où $\mathcal{D}_f = ]-1, +\infty[$.
2. Ici, la limite en -1 est une limite à droite en $-1$. Or $\lim\limits_{x\to -1^+} 1 + x = 0^+$ (puisque $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$), d'où $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{1+x} = +\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$, par produit, $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = -\infty$, et par somme, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Présence d'une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
3. D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{X\to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$, donc avec $X = 1+x$, comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x+1 = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$, et par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
   La dernière partie est immédiate puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ d'après ce qui précède.
4. $f$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions usuelles dérivables sur $]-1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Pour tout $x > -1$, $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{1+x}\times(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - \left(1 - \ln(1+x)\right)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$.
5. (a) $N$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $]-1, +\infty[$, et pour tout $x > -1$, $N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{1+x} > 0 + 0 = 0$. Donc $N$ est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.
   Or $\lim\limits_{x\to -1} N(x) = -\infty$, puisque $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} N(x) = +\infty$ par somme (pas de FI).
   (b) Il manque encore une information pour trouver le signe de $N$ : on remarque que $N(0) = 0$ donc $N$ est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $]-1, 0]$.
6. Comme pour tout $x > -1$, $f'(x)$ est du signe de $N(x)$, on en déduit que $f$ est décroissante sur $]-1, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$, donc $f$ admet un minimum en $x = 0$ de valeur $f(0) = 0$.
7. On résout l'équation définie sur $]-1, +\infty[$ : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$. Unique point d'intersection d'abscisse 0 donc de coordonnées $(0, 0)$.
8. Position relative de $\Delta$ et $\mathcal{C}$ : $f(x) - x = -\frac{\ln(1+x)}{1+x}$. Or pour $x > -1$, $1 + x > 0$, donc $f(x) - x$ est du signe de $-\ln(1+x)$. Plus précisément : $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) < 0 \Leftrightarrow 1 + x < 1 \Leftrightarrow dx < 0$.
   La courbe de $f$ est au-dessus de la droite $\Delta$ sur $]-1, 0]$, et en-dessous sur $[0, +\infty[$.
9. Equation de la tangente en 0 : $y = 0$ puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Donc tangente horizontale. Asymptote verticale à dessiner. Droite $\Delta$ à dessiner. Puis s'attaquer à la courbe de $f$ qui passe par le point $(0, 0)$, reste en-dessous de $\Delta$ sur $\mathbb{R}_+$ mais s'en approche (car est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$).