

Exercice 1:

Faire l'exercice 19 de la feuille 5 "Polynômes de Lagrange".

Indication : si vous arrivez à un système à 4 équations, 4 inconnues, changer d'écriture pour $P \dots$

Exercice 2:

On définit la suite u par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{4}{3}$.
3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}(4 - x^2)$.
 - (a) Calculer $f(1)$.
 - (b) * Vérifier que pour tous $a, b \in [0, \frac{4}{3}]$, $|f(b) - f(a)| \leq \frac{8}{9}|b - a|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{8}{9}|u_n - 1|$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq (\frac{8}{9})^n$.
6. La suite u converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 3:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. Montrer alors que A est inversible et expliciter son inverse sous forme de tableau.
3. Refaire la question 2. via une autre méthode (résolution de système).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$. On précisera les relations de récurrence obtenues entre a_{n+1} , b_{n+1} et a_n , b_n .
5. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire sa forme explicite.
6. Expliciter alors A^n sous forme de tableau.

Travail libre de vacances

Mise en garde concernant votre travail : toujours préférer la qualité à la quantité. De plus, pour certains, il sera préférable de reprendre les exercices faits en classe, les DMs ou le DS1 pour bien assimiler les méthodes, plutôt que de regarder les exercices qui vont suivre. Bref, à vous de cibler ce dont vous avez besoin. Mais dans tous les cas, n'oubliez pas de travailler les mathématiques ces vacances !

Exercice 4:

Commencez par reprendre le travail des DMs, et les questions les plus faciles du DS1 : les Questions 1.2. et 6., l'exercice 3, et le début de l'exercice 2.

Pour aller plus loin, reprendre les parties plus difficiles du DS 1 (la fin de l'exercice 1 et la fin de l'exercice 2, ainsi que les Questions restantes).

Exercice 5:

On définit la fonction f par $f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .
2. Donner le signe de f sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
4. Déterminer la limite de f en 1. *On pourra penser au changement de variable $X = x - 1$ et réviser les limites usuelles (toute fin du chapitre 1 de Révisions).*
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
6. On introduit $\varphi : x \mapsto x - 1 - x \ln x$. Dresser le tableau de variations complet de φ sur $]0, +\infty[$.
7. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathcal{D}$.
8. Représenter graphiquement l'allure de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 6: *Très intéressant et accessible en dehors de la dernière question*

Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / MD = DM\}$.

1. Déterminer les matrices de E .
2. On considère l'équation $M^2 - M + D = 0$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer qu'il n'existe pas de solutions M telles que M soit diagonale.
 - (b) Montrer, sans calculs de tableaux, que si M est solution, alors $M \in E$.
 - (c) ** Montrer qu'il existe une infinité de solutions à cette équation.

Exercice 7: *Encore des fonctions, pour ceux qui en ont besoin ; ressemble à l'exercice 2 du DS 1*

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^{1-x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . *Attention de choisir la bonne écriture de f !*
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = x(-2 \ln x + \frac{1}{x^2} - 1)e^{(1-x^2) \ln x}$.
4. A l'aide d'une fonction auxiliaire, déterminer le signe de f' .
5. Dresser le tableau de variations de f , puis dessiner l'allure de la courbe.

Exercice 8: *Pour aller plus loin, un peu plus abstrait*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite pseudo-inversible si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} AB = BA \\ ABA = A \\ BAB = B \end{cases} \text{ . On dit alors que } B \text{ est une pseudo-inverse de } A.$$

1. Soit A une matrice pseudo-inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A .
 - (a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_1 = AB_2$.
 - (b) * En déduire que $B_1 = B_2$.
Ainsi la matrice A admet un unique pseudo-inverse, appelé la pseudo-inverse de A et notée A^* .
2. Montrer que la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.
3. Montrer que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.
4. Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: alors il existe un entier p tel que $N^p = 0_n$ et $N^{p-1} \neq 0_n$.
On suppose de plus que N est pseudo-inversible.
 - (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $N^*N^k = N^{k-1}$.
 - (b) Montrer alors que si $p \geq 2$, on arrive à une contradiction. Qu'en déduit-on sur N ?
 - (c) Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. N peut-elle être pseudo-inversible ?
5. (a) * Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que D est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse. *On pourra distinguer les coefficients diagonaux nuls des autres.*
 - (b) Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors $A = PDP^{-1}$. Montrer que A est pseudo-inversible et exprimer A^* en fonction de D^* et P .