Devoir à la maison 8 facultatif

Question :
Soit X une variable suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer l'espérance de 3^X.

Exercice 1:

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$.
On lance la pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
• Soit si l'on a obtenu "Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = n$, la probabilité de $P(T_n = k)$.
   (b) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   (c) Montrer que pour $x \neq 1$, $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$.
   (d) Etablir que T_n admet une espérance et vérifier que $E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}$.
2. Donner la loi de X_n et vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. (a) Donner la loi de Y_n.
   (b) Ecrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n puis en déduire $E(Y_n)$.

Exercice 2: *pour aller plus loin*

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec une boule supplémentaire de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve et on réalise ainsi n tirages ($n \geq 1$).
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages.

1. Donner la loi de X_1, puis la loi de X_2.
2. (a) Dorénavant, on pose $n \geq 2$. Déterminer $X_n(\Omega)$.
   (b) Montrer que $P(X_n = 0) = \frac{1}{n+1}$.
   (c) ** Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = j) = \frac{j}{n+1} P(X_{n-1} = j - 1) + \frac{n-j}{n+1} P(X_{n-1} = j)$.
   (d) En déduire par récurrence que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!]$.
   (e) Calculer l'espérance et la variance de X_n.