Travail libre, vacances de printemps 2022-23

En première partie, des révisions

SERIES : Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1. Justifier la convergence des séries suivantes, et calculer la valeur de leur somme : $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n-1}{n!}$ $\qquad$ $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{3^n}$
2. Donner la nature des séries suivantes : $\sum\limits_{n\geq 2} \ln(1-\frac{1}{n^2})$ $\qquad$ $\sum\limits_{n\geq 0} ne^{-\sqrt{n}}$ $\qquad$ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{-1/n}}{1+2^n}$
3. Un enchaînement de questions a permis de montrer que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x)| \leq \frac{1}{(1-x)(n+1)}$. $\qquad$ Qu'en déduit-on sur la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$?
4. Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+\frac{3}{2}} u_n$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
   (b) On suppose que $\ell \neq 0$ et on considère la série de terme général $v_n = u_n - u_{n+1}$
      i. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est convergente.
      ii. Montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{2n}$
      iii. Conclure.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

PROBABILITES :

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.
On tire une boule : si elle est noire on s'arrête, et sinon on remet la boule tirée dans l'urne en ajoutant une boule noire. On réitère ainsi le procédé et on introduit la variable aléatoire X égale au nombre de tirages effectués.

1. Compléter le programme python suivant afin qu'il simule l'expérience et affiche la valeur de X.
```
k=.......
n=.......
while ....... :
    k=.......
    n=.......
x=.......
print(x)
```
2. Déterminer $X(\Omega)$, puis justifier que pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \frac{k}{(k+1)!}$.
3. Montrer que la variable $Y = X+1$ admet une espérance et la calculer.
   En déduire que X admet une espérance et préciser sa valeur.

ALGEBRE LINEAIRE

1. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[x] \,/\, 2P - xP' = 0_{\mathbb{R}[x]}\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, nP - xP' = 0_{\mathbb{R}[x]}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ et calculer sa dimension.
3. (a) Déterminer l'ensemble $Vect(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) Soit $e_1 = (1,2,3,4)$ et $e_2 = (1,-2,3,-4)$. A-t-on $(\frac{1}{3},1,1,2) \in Vect(e_1,e_2)$?
4. Montrer que la famille de matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans cette base.
5. Soit φ définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(P)(x) = P(x) - (x+1)P'(x)$.
   (a) Vérifier que φ est un endormorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Déterminer le rang de φ.
   (c) En déduire une base de φ.
   La méthode que j'attends ne nécessite pas de résolution de système (révision de la question clé, chapitre dimension)

En deuxième partie, quelques extraits d'annales, pour réviser et aller plus loin et sur demande, je peux envoyer par mail un problème (durée approximative de 2h) qui porte sur les derniers chapitres.

Exercice 1: `inspiré d'Ecricome E 2015`

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher. L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire et l'urne U_2 contient N boules blanches.

Question préliminaire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés.

1. Ecrire une fonction python de paramètre d'entrée N, qui simule l'expérience et renvoie la valeur de X.
2. Déterminer la loi de X. En déduire son espérance. Proposer également une variante de la fonction du 1.

Première expérience

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note : C_1 (resp. C_2) l'événement « on choisit l'urne U_1(resp. U_2) ».

1. Déterminer pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$: $P_{C_1}(Y = j)$ et $P_{C_2}(Y = j)$.
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.

Deuxième expérience

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche. On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

1. Préciser les valeurs prises par T, puis déterminer la loi de T.
2. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et une variance que l'on calculera.
3. Déterminer $U(\Omega)$, puis calculer $P(U = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.
4. En déduire la loi de U.
5. Ecrire un programme `python`, qui simule l'expérience ci-dessus, et affiche les valeurs de T et de U.

Exercice 2:

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ et les relations de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ ainsi que $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer AX_n.
   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier n. *indication : On pourra écrire judicieusement T*
3. (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (c) Vérifier que $A = PTP^{-1}$.
4. Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 3: `Ecricome S 98 (=oral Escp 2012)`

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et T l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $T(f) = F$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

1. Justifier que pour tout $f \in E$, $F = T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E.
3. Déterminer $T(f)$ lorsque $f(x) = \sin(2\pi x)$
4. L'application T est-elle surjective ? injective ?

Exercice 4: `Ecricome E 97`

On pose pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}(1 - e^{-t})^n dt$.

1. Justifier la convergence de $I_n(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$
2. Montrer que $I_n(1) = \frac{1}{n+1}$. En déduire que pour tout $a \geq 1$, $I_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Calculer $I_0(a)$ et $I_1(a)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $aI_{n+1}(a) = (n + 1)(I_n(a) - I_{n+1}(a))$.
5. En déduire une expression de $I_{n+1}(a)$ en fonction de $I_n(a)$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n(a) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (a+k)}$