# Eléments de correction du DS 1

**Questions**

1. (a) $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ f(x) \geq m$ (b) $\exists x \in I,\ f(x) = 0$
   (c)$\exists q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
2. cf corrigé DM 1, question, en ligne.
   Vérifier que vous avez (enfin !) penser à l'ensemble de définition avant de vous lancer dans les équivalences.
3. cf feuille d'exo $\sum$ et DM 2 pour des rédactions détaillées.

   En accéléré : $A_n = 2(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 - \sum\limits_{k=1}^{9} k^2) - (\sum\limits_{k=1}^{n} k - \sum\limits_{k=1}^{9} k) = 2(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{9\times 10\times 19}{6}) - (\frac{n(n+1)}{2} - \frac{9\times 10}{2})$.
   $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-2^3)^k = \frac{1-(-8)^n}{1-(-8)}$ car $-8 \neq 1$. $C_n = 5^n \sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{2}{5})^n = 5^n \frac{1-(2/5)^{n+1}}{1-(2/5)}$ car $2/5 \neq 1$
   $D_n = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} = \frac{1}{n!}[(3+2)^n - \binom{n}{0}3^0 2^n] = \frac{5^n - 2^n}{n!}$ d'après la formule du binôme ...
4. L'expression $|x-1$ dépend du signe de $x-1$.
   Premier cas : $x \in [1, +\infty[$. Alors $|x-1| = x-1$ et l'inégalité à montrer devient $x - 1 \leq x^2 - x + 1$.
   Or $x^2 - x + 1 - (x-1) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 x + 1 \geq 0$ (sinon, poser $\Delta$ et montrer $\Delta < 0$).
   Deuxième cas : $x \in ]-\infty, 1[$. Alors $|x-1| = -(x-1)$ et l'inégalité à montrer devient $-(x-1) \leq x^2 - x + 1$.
   Or $x^2 - x + 1 + (x-1) = x^2 \geq 0$.
   Il reste à conclure !
5. ** Rappel : le raisonnement par contraposée pour montrer "$P \Rightarrow Q$" consiste à montrer " $nonQ \Rightarrow nonP$".
   Ici, on suppose donc "$n$ est un entier impair", et on doit montrer que "$n^2 - 1$ est multiple de 8".
   Comme $n$ est un entier impair, il existe $k \in \mathbb{N}/\ n = 2k+1$. Alors $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$.
   Il est facile de voir que 4 divise $n^2 - 1$. Il reste à montrer que 2 divise $k(k+1)$ Or $k$ et $k+1$ sont deux entiers consécutifs, donc forcément l'un est pair. donc $k(k+1)$ peut s'écrire sous la forme $2j$, avec $j \in \mathbb{N}^*$ et finalement $n^2 - 1 = 4 \times 2 \times j = 8j$ est bien multiple de 8.

**Exercice 1:** `inspiré d'Esclsca 99`

1. $\sum\limits_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = \sum\limits_{i=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$ d'après le binôme de Newton.
2. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. Alors $\binom{2n}{2n-k} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!(2n-(2n-k))!} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!(k)!} = \binom{2n}{k}$.
3. (a) $S_1 = \sum\limits_{i=0}^{1} \binom{2}{1+i} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2 + 1 = 3$ et $S_2 = \sum\limits_{i=0}^{2} \binom{4}{2+i} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$.
   (b) On commence par poser $j = i + n$. Les bornes deviennent : $i = 0 \Rightarrow j = n$ et $i = n \Rightarrow j = 2n$, d'où $S_n = \sum\limits_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j}$. Puis en utilisant (2), il vient $S_n = \sum\limits_{j=n}^{2n} \binom{2n}{2n-j} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n-2} + ... + \binom{2n}{0} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}$
4. D'après 3.(b), $2S_n = S_n + S_n = \sum\limits_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} + \binom{2n}{n}$ (ce dernier terme étant présent dans les deux sommes). D'où $2S_n = 2^{2n} + \binom{2n}{n}$. On conclut en divisant par 2 l'égalité.
5. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{p+1} = \frac{\binom{2(p+1)}{p+1}}{2^{2(p+1)}} = \frac{\binom{2p+2}{p+1}}{2^{2p+2}} = \frac{\frac{(2p+2)!}{(p+1)!(p+1)!}}{2^{2p}\times 2^2} = \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{(p+1)p!(p+1)p!}\frac{1}{2^{2p}\times 4} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{4(p+1)^2} \times \frac{(2p)!}{p!p!}\frac{1}{2^{2p}} = \frac{2(p+1)(2p+1)}{4(p+1)^2} \times u_p = \frac{2p+1}{2(p+1)} u_p$.
   (b) $u_1 = \frac{\binom{2}{1}}{2^2} = \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{\sqrt{2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = u_1$.
   Supposons que pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$, et montrons que pour ce $p$, $u_{p+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2(p+1)+1}}$.
   Or $u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$, donc comme $\frac{2p+1}{2p+2} \geq 0$, $\frac{2p+1}{2p+2} u_p \leq \frac{2p+1}{2p+2}\frac{1}{\sqrt{2p+1}}$ d'où $u_{p+1} \leq \frac{\sqrt{2p+1}}{2p+2}$. Il reste à montrer que $\frac{\sqrt{2p+1}}{2p+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2p+3}}$, ce qui revient à montrer que (tout est positif) : $\frac{2p+1}{(2p+2)^4} \leq \frac{1}{2p+3}$.
   Calcul technique mais qui sort bien : $\frac{1}{2p+3} - \frac{2p+1}{(2p+2)^2} = \frac{(2p+2)^2 - (2p+1)(2p+3)}{(2p+3)(2p+2)^2} = \frac{4p^2+8p+4-(4p^2+8p+3)}{(2p+3)(2p+2)^2} = \frac{1}{(2p+3)(2p+2)^2} \geq 0$, ce qui achève l'hérédité.
   Il reste à conclure. ouf !
   (c) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+2}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = 0$. Donc la suite $u$ converge (elle admet une limite finie).

**Exercice 2:**

A

1. $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, e^x + e^{-x} > 0\} = \mathbb{R}$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (donc $e^{-x} > 0$).
   Parité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \ln(e^{-x} + e^x) = f(x)$. Donc $f$ est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x$ (stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
3. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Donc par 1., $f'(x) > 0$ ssi $x > 0$. Pas de FI pour les limites, on trouve $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (à détailler quand même un peu !)
4. $f$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1 \in [\ln(2), +\infty[$, puisque $1 = \ln(e) \geq \ln(2)$ par croissance du ln. Donc d'après le théorème "dont on reverra le nom", il existe une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$ à l'équation $f(x) = 1$.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = ln(e^x + e^{-x}) - \ln(e^x) = \ln(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}) = \ln\left(1 + e^{-2x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 5., $f(x) - x = \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$ et comme $1 + e^{-2x} > 1$ et que ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ on a alors $\ln\left(1 + e^{-2x}\right) > \ln(1) = 0$. Ici la question était un "montrons que", et non "résoudre l'inéquation $f(x) > x$ ", donc NE PAS partir du résultat !
7. Pour $x \in \mathbb{R}$ (ici résolution !), $f(x) < x+1 \Leftrightarrow f(x) - x < 1 \Leftrightarrow \ln(1+e^{-2x}) < 1 \Leftrightarrow 1+e^{-2x} < e$ car exp strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow e^{-2x} < e - 1 \Leftrightarrow -2x < \ln(e-1)$ (car ln strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$) $\Leftrightarrow x > \frac{-\ln(e-1)}{2}$

B

1. Par récurrence : $u_0 = 0 \geq 0$. Puis, supposons que pour un certain $n$, $u_n \geq 0$, et montrons que $u_{n+1} \geq 0$. Or $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $u_n \geq 0 \Rightarrow f(u_n) \geq f(0) \Rightarrow u_{n+1} \geq \ln(2) \geq \ln(1) = 0$. Conclure.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec $x = u_n \in \mathbb{R}$, A.6. donne : $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. (ou $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ par A.5.) La suite est croissante.
3. Raisonnement par l'absurde : on suppose que la suite $u$ converge. Soit $\ell$ sa limite ; $u_n \to \ell$ alors (par continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$), $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$, donc par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} + e^{-u_n})$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $\ell = f(\ell)$.
   Equation impossible par A.6 . Donc, la suite $u$ diverge. Comme la suite est croissante, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4. Comme la suite $u$ est croissante et que $u_0 = 0$, on a pour tout entier $n$, $u_n \geq 0 > -\frac{\ln(e-1)}{2}$ et donc par A7. on obtient $f(u_n) < u_n + 1$ soit $\quad u_{n+1} < u_n + 1$.
5. Par récurrence : pour $n = 0$ on a $u_0 = 0 < 0 + 1$
   Supposons que pour un certain $n$, $u_n < n + 1$. Montrons que $u_{n+1} < n + 2$. Or par la question précédente puis par H.R, $u_{n+1} < u_n + 1 < n + 1 + 1$ donc $u_{n+1} < n + 2$.
   *Conclusion :* pour tout entier $n$, $\quad u_n < n + 1$.
6. Encore une récurrence ! Hérédité : supposons $u_n \leq \ln(n+1)$, alors par croissance de $f$ sur $\mathbb{R}_+$, $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(\ln(n+1)) = \ln(e^{\ln(n+1)} + e^{-\ln(n+1)}) = \ln(n + 1 + \frac{1}{n+1}) \leq \ln(n+1+1)$ [par croissance du ln] $= \ln(n+2)$.

**Exercice 3:** `Ecricome E 99`

**Question préliminaire :**

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique : $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. On obtient $\Delta = \frac{13}{9}$, $\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ d'où deux racines $r_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$. On sait alors qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Or $9 \leq 13 \leq 16$ d'où $3 \leq \sqrt{13} \leq 4$ et finalement (par construction), $0 \leq r_2 \leq \frac{5}{6} < 1$ et $-1 < -\frac{1}{2} \leq r_2 \leq 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} r_1^n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} r_2^n$ et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

**Question 1**

a) Montrons $\forall n \in \mathbb{N}$, "$u_n$ existe et $u_n \geq 1$". *Cas* $n = 0$ et $n = 1$ : par hypothèse, $u_0 = a \geq 1$ et $u_1 = b \geq 1$. Supposons que pour un certain entier $n$ " $u_n$ existe et $u_n \geq 1$", et " $u_{n+1}$ existe et $u_{n+1} \geq 1$". Or $\sqrt{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, donc par H.R. $u_{n+2}$ existe, et par croissance de $\sqrt{\ }$, $\sqrt{u_n} \geq \sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{u_{n+1}} \geq 1$ d'où $u_{n+2} \geq 2 \geq 1$. *Ccl.*

b) Supposons que la suite $u$ converge vers un réel $\ell$. Alors par passage à la limite dans l'inégalité du a), on obtient $\ell \geq 1$. Puis comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}$, par passage à la limite dans la relation $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ : $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell} \Leftrightarrow \ell = 2\sqrt{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 4\ell$ (car $\ell \geq 0$) $\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 4$. Comme $\ell \geq 1$, on obtient $\ell = 4$.

**Question 2**

a) Supposons que la suite $v$ converge vers 0. Alors comme $\sqrt{u_n} = 2(v_n + 1)$, on obtient $u_n = 4(v_n + 1)^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 4$.

b) Il est équivalent de montrer que $v_{n+2} \times 2(2 + v_{n+2}) = v_{n+1} + v_n$ car $2 + v_{n+2} \neq 0$. Regardons chaque membre : $v_{n+1} + v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) - 2 = \frac{1}{2}u_{n+2} - 2$. Et de même :
$v_{n+2} \times 2(2 + v_{n+2}) = 4v_{n+2} + 2v_{n+2}^2 = 2\sqrt{u_{n+2}} - 4 + 2(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1)^2 = 2\sqrt{u_{n+2}} - 4 + \frac{1}{2}u_{n+2} - 2\sqrt{u_{n+2}} + 2 = \frac{1}{2}u_{n+2} - 2$.

c) Par 1.a) $2+v_{n+2}=\frac{1}{2}\sqrt{u_n}+1\geq\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ d'où $|2(2+v_{n+2})|=2(2+v_{n+2})\geq 3$.
Puis $|v_{n+2}|=\left|\frac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}\right|=\frac{|v_{n+1}+v_n|}{|2(2+v_{n+2})|}$. Or par inégalité triangulaire, $|v_{n+1}+v_n|\leq|v_n|+|v_{n+1}$ et d'après ce qui précède, $\frac{1}{|2(2+v_{n+2})|}\leq\frac{1}{3}$. Finalement, $|v_{n+2}|\leq\frac{|v_{n+1}|+|v_n|}{3}=\frac{1}{3}(|v_n|+|v_{n+1}|)$.

d) Par définition de la suite $(x_n)$, on a $|v_0|=x_0$ donc $|v_0|\leq x_0$ et de même $|v_1|\leq x_1$.
Supposons que pour un certain $n$, $|v_n|\leq x_n$ et $|v_{n+1}|\leq x_{n+1}$. Montrons que $|v_{n+2}|\leq x_{n+2}$. Or d'après b), $|v_{n+2}|\leq\frac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|)\leq\frac{1}{3}(x_{n+1}+x_n)$ [par H.R.] $=x_{n+2}$ [déf de la suite $(x_n)$].Conclusion.

e) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq|v_n|\leq x_n$ et d'après la question préliminaire, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$. Donc (théorème d'encadrement), $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. Donc (question 2.a) ) , $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$.

**Exercice 4:** `Ecricome E 2002`

1. A droite en -1, $x+1\underset{x\to-1^+}{\longrightarrow}0^+$. Alors $\ln(1+x)\underset{x\to-1^+}{\longrightarrow}-\infty$ et $\frac{1}{1+x}\underset{x\to-1^+}{\longrightarrow}+\infty$ d'où $\frac{x}{1+x}\underset{x\to-1^+}{\longrightarrow}-\infty$. Par somme, $h_n(x)=\underset{x\to-1^+}{\longrightarrow}-\infty$. Asymptote verticale d'équation $x=-1$.
2. En $+\infty$, $\frac{x}{1+x}=\frac{x}{x(1+1/x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$ donc par somme, $h_n(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Puis $\frac{h_n(x)}{x}=n\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{1}{x+1}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ car $\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(x(1+1/x))}{x}=\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln(1+1/x)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ d'après les croissances comparées.
3. $h_n$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ (comme somme quotient de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'y annule pas ) et pour tout $x>-1$, $h_n'(x)=\frac{n}{1+x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=\frac{n}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}>0$ car $x>-1$. Et $h_n(0)=0$. En particulier, signe de $h_n$ : négative sur $]-1,0]$, positive sur $[0,+\infty[$.
4. Bien utiliser toutes les questions précédentes (1. $\to$ 4.).Traduction de la 2. : la courbe sera "plate" vers $+\infty$.
5. (a) $f_1(x)=x\ln(1+x)$ donc est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $f_1'(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}=h_1(x)$
   (b) Donc $f_1$ est décroissante sur $]-1,0[$ et croissante sur $]0,+\infty[$. Minimum en $x=0$ de valeur $f(0)=0$. Pas de FI pour les limites : $\lim\limits_{x\to-1}f_1(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$ (donner un détail pour chaque !)
6. (a) $f_n$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $f_n'(x)=nx^{n-1}\ln(1+x)+\frac{x^n}{1+x}=x^{n-1}\left(n\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right)=x^{n-1}h_n(x)$
   (b) Donc si $n$ est pair, $n-1$ est impair donc $x^{n-1}$ est négatif sur $]-1,0]$, positif ensuite, comme $h_n$, donc par produit (faire tableau de signe), $f_n'\geq 0$ (même $>0$ en dehors de 0). Limite en -1 : $x_n\to(-1)^n=1$ et $\ln(1+x)\to-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1}f_n(x)=-\infty$ et en $+\infty$, $f_n(x)\to+\infty$.
   Si $n$ impair, $n-1$ pair donc $x^{n-1}$ positif sur $]-1,+\infty[$, et $f_n'$ du signe de $h_n$. $f_n$ décroissante sur $]-1,0]$, croissante ensuite. $\lim\limits_{x\to-1}f_n(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$