Eléments de correction du DS 3

Questions :

1. Il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme $A0_n = 0_n = 0_nA$, on obtient bien $0_n \in E$, donc $E \neq \varnothing$.
   Soit $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + N \in E$.
   On sait : $AM = MA$ et $AN = NA$. Vérifions la condition sur $\lambda M + N$.
   Or $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$ d'où $\lambda M + N \in E$. conclure.
2. Posons $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$. Alors $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$ et $c = 0$ d'où $F = \{ax^3 + bx^2, a, b \in \mathbb{R}\} = Vect(x^3, x^2)$. Donc F sev de $\mathbb{R}_3[x]$, et la famille (x^3, x^2) est génératrice de F. Comme elle est constitués de polynômes non-nuls de degrés distincts elle est libre (ou dire sous-famille de la base canonique, ou le montrer !), donc elle est une base de F.
3. (a)
```
def suite(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1)
        u=u**2+1
    return u
```
   (b) Pour mq la suite est croissante : soit on commence par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ (par récurrence), puis on regarde $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 = u_n(u_n - 1) + 1 \geq 0$. Soit on montre la monotonie par récurrence : $u_1 = 2 \geq 1 = u_0$, et si on suppose que $u_n \leq u_n^2$, alors par croissance de la fonction carrée, $u_n^2 \leq u_{n+1}^2$ d'où $u_n^2 + 1 \leq u_{n+1}^2 + 1$ et $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Ccl.
   On suppose ensuite que la suite converge, et on pose ℓ la limite finie de la suite. Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient : $\ell = \ell^2 + 1$, trinôme avec $\Delta < 0$ donc contradication.
   On en déduit que la suite diverge, et comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.
   (c) On peut conjecturer que la suite va diverger très très vite ....
   (d)
```
def suite_bis(n):
    U=zeros(n+1)
    u=1
    U[0]=u
    for i in range(1,n+1)
        u=u**2+1
        U[i]=u
    return U
```

Exercice 1:

1. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, alors $\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ puisque $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Et $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$.
   (b) On a : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = 0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$ par la relation de Chasles
   $= \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$ d'après la question précédente $= \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-(\ell+1)}$ en posant $\ell = k - 1$
   $= \frac{1}{3}\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-\ell} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}$ par la formule du binôme de Newton
2. On introduit pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, N_j "obtenir une boule noire au j^{ie} tirage", et soit A_k l'événement "obtenir aucune blanche au cours des k tirages". Alors $A_k = N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_k$, et d'après la formule des probabilités composées, comme $P(N_1 \cap ... \cap N_{k-1}) \neq 0$, $P(A_k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)...P_{N_1\cap...\cap N_{k-1}}(N_k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times ... \times \frac{n-1-(k-1)}{n-(k-1)} = \frac{n-k}{n}$ par télescopage.
   La probabilité d'obtenir la boule blanche est donc : $P(\bar{A}_k) = 1 - \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n}$.
3. La variable aléatoire X compte le nombre de succès (obtenir face) de probabilité $\frac{1}{3}$ lors d'une répétition de n lancers indépendants. Ainsi X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.
4. D'après le cours, X admet espérance et variance et $E(X) = n \times \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$ et $V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2n}{9}$.
5. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Si $k = 0$, on ne pioche aucune boule, donc $P_{(X=k)}(Y = 1) = 0 = \frac{k}{n}$.
   Si $k \neq 0$, sachant $(X = k)$, on a effectué k tirages successifs et sans remise, donc la boule blanche est piochée, avec probabilité $\frac{k}{n}$ d'après 2.(b), donc $P_{(X=k)}(Y = 1) = 0 = \frac{k}{n}$.
6. $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc Y suit une loi de Bernoulli. II reste à déterminer son paramètre à savoir $P(Y = 1)$. Or d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $((X = k))_{k\in[\![0,n]\!]}$, on a $P(Y = 1) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = 1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \frac{1}{3}$ d'après 1.(b).
   Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{3})$ et $E(Y) = \frac{1}{3}$, $V(Y) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Exercice 2: `inspiré d'eml E 2020`

Partie A

1. Pour $x \in]0,1[$, $x > 0$ et $1-x>0$ donc $\ln(x)$ et $\ln(1-x)$ existent et $\ln(x) \neq 0$. Donc $f(x)$ existe bien. Puis si $x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$ et $\ln(1-) < 0$ (car $1-x<1$), donc $f(x) > 0$.
2. f est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{1-x}\ln x - \frac{1}{x}\ln(1-x)}{(\ln x)^2}$. Il reste à mettre le numérateur au même dénominateur puis à utiliser la formule $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$.
3. $\forall t \in]0,1[$, $t>0$ et $\ln t < 0$ donc $t \ln t < 0$ donc en prenant $t = x$ puis $t = 1-x$, on obtient $-x\ln x > 0$ et $-(1-x)\ln(1-x) > 0$. Par somme, le numérateur est strictement positif, et par quotient $f'(x) > 0$.
4. par continuité du ln en 1, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$. Donc f se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0 : dorénavant, on pose $f(0) = 0$.
   Dérivabilité en 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{x\ln(x)} = -\frac{1}{\ln x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$.
   D'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0^-$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ (pas de F.I.!!)
   Asymptote verticale d'équation $x = 1$.
7. (a) f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ donc (d'après le th de la bijection) f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[f(0), \lim\limits_{x\to 1} f(x)[= [0,+\infty[$.

   (b) De plus $f^{-1} : [0,+\infty[\to [0,1[$ est continue et strictement croissante comme f. Dessiner alors le TV.

   (c) Pour tout $x \in]0,1[$, f est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[) =]0,+\infty[$. En revanche en 0, $f'(0) = 0$, donc en $f(0) = 0$ il y aura une tangente verticale : f^{-1} n'est donc pas dérivable en 0.

   (d) Pour trouver $f^{-1}(1)$, on résout l'équation $f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(1-x) = \ln(x)$ d'inconnue $x \in]0,1[$ (en effet, $x = 0$ ne convient pas). On devine que $x = \frac{1}{2}$ marche. Par bijection, ce sera la seule solution donc $f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$. Puis, $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})}$. Il reste à calculer $f'(\frac{1}{2}) = ... = -\frac{4}{\ln(1/2)}$ d'où $(f^{-1})'(1) = \frac{\ln(2)}{4}$.
8. L'allure de la courbe de f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$....

Partie B

9. Soit $n \geq 1$. Poser $g_n : x \mapsto x^n + x - 1$ sur $\mathbb{R}^+$. TV etc... Alors g_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc g_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[g_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)[= [-1,+\infty[$. Par définition de la bijection, comme $0 \in [-1,+\infty[$, l'équation $g_n(x) = 0$ (càd (E_n)) admet bien une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
10. En réutilisant g_n : on a $g_n(0) = -1 < 0$ et $g_n(1) = 1 > 0$ Donc $g_n(0) < g_n(u_n) < g_n(1)$ et par stricte croissante de g_n sur $\mathbb{R}^+$, on a bien $0 < u_n < 1$.
11. u_1 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $x^1 + x - 1 = 0$. Or $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ donc $u_1 = \frac{1}{2}$. de même pour u_2 : $x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ d'où $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (justifier rapidement le signe).
12. (a) Les quatre complétions sont : `while b-a>0.001` (pour avoir la précision souhaitée ! on pourrait même raffiner en mettant 0.002 puisqu'on va renvoyer le milieu à la fin) ; `b=c` (la fonction g_n est croissante, donc si elle est déjà positive en c, c'est qu'elle s'annule avant càd dans l'intervalle $[a,c]$) ; `a=c` ; `return c`.

    (b) Au vu du graphique, on conjecture que la suite u est croissante, et converge vers 1.
13. (a) u_n étant solution de (E_n), on a $(u_n)^n + x_n - 1 = 0 \Leftrightarrow (u_n)^n = 1 - u_n \Leftrightarrow \ln((u_n)^n) = \ln(1-u_n)$ (par bijectivité du ln sur $\mathbb{R}_+^*$ $\Leftrightarrow n\ln(u_n) = \ln(1-u_n) \Leftrightarrow \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} = n$ (puisque $u_n \neq 1$ donc $\ln(u_n) \neq 0$). D'où le résultat.
    Variante : partir de l'équation $f(x) = n$ .... et retomber (via des équivalences) sur (E_n). Donc u_n étant solution de l'une, est solution de l'autre !.

    (b) On a donc $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n+1$. Comme $n+1 > n$, on en déduit $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ et vu la stricte croissance de f, on obtient (cf TV), $u_{n+1} > u_n$.

    (c) La suite (u_n) est croissante d'après le (e), et majorée par 1 d'après le (c) : elle est donc convergente ! Ou directement : $f(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque d'après 7.(b), $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = 1$. (ce dernier résultat donne la cv ainsi que la limite).

Exercice 3: `expérience inspirée d'Ecricome E 2010`

1. (a) Si on lance deux dés, $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, et $B = \{(1,1),...,(6,6)\}$ d'où $b = P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. De même, $A = \{(1,2),(1,3),...,(1,6),(2,3),...,(2,6),...(5,6)\}$ d'où $a = P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$, et de même $c = P(C) = \frac{5}{12} = a$.

   (b) $X_1(\Omega) = \{0,1,2\}$ et vu le gain d'une partie, $P(X=0) = a$, $P(X=1) = c$ et $P(X_1 = 2) = b$.
   $E(X_1) = 0 + c + 2b$, $E(X_1^2) = 0 + c + 2^2 b$ et $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)$.

(c) X_2 a même loi que X_1 et $Y = X_1 + X_2$ d'où par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(X_1) + E(X_2) = 2c + 4b$.
Loi de Y : $Y(\Omega) = [\![0, 4]\!]$. $(Y = 0) = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$, et par indépendance des parties, $P(Y = 0) = a^2$.
$(Y = 1) = [(X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)] \cup [(X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)]$ réunion de deux événements incompatibles, d'où $P(Y = 1) = 2ac$. De même, $P(Y = 4) = b^2$, $P(Y = 3) = 2bc$ et $P(Y = 2) = 2b + c^2$ (ou faire 1- ...)
Ou introduire les événements de type A_1, A_2 ....

2.
```
def exo3(n):
    s=0
    for i in range(n):
        d1=rd.randint(1,7)
        d2=rd.randint(1,7)
        if d1==d2:
            s=s+2
        elif d1>d2:
            s=s+1
    return s
```

3. Le joueur peut gagner deux points dès la première partie, mais aussi jouer les n parties autorisées sans gagner d'où $T(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Pour décrire les événements $(T = ...)$, soit on introduit des événements du type A_k "la k^{ie} partie réalise A", soit on introduit les variables aléatoires X_3, ... X_n ...
Alors $(T = 1) = B_1$ d'où $P(T = 1) = b$; $(T = 2) = [A_1 \cap B_2] \cup [C_1 \cap C_2] \cup [C_1 \cap B_2] = [A_1 \cap B_2] \cup [C_1 \cap \bar{A}_2]$ et $P(T = 2) = ab + c(1 - a)$.

4. plus généralement $(T = k) = [A_1 \cap ... \cap A_{k-1} \cap B_k] \cup \left[(C_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap \bar{A}_k) \cup ... \cup (A_1 \cap ... \cap A_{k-2} \cap C_{k-1} \cap \bar{A}_k)\right]$ pour $k \in [\![3, n-1]\!]$ et $P(T = k) = a^{k-1}b + (k-1)ca^{k-2}(1 - a)$.

5. Soit par le calcul : $P(T = n) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} P(T = k) = ...$ Soit par la description, mais réaliser alors que le résultat du n^{ie} lancer n'importe pas puisque le jeu s'arrête de toute façon d'où $(T = n) = [A_1 \cap ... \cap A_{n-1}] \cup \left[(C_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \cup ... \cup (A_1 \cap ... \cap A_{n-2} \cap C_{n-1})\right]$ et $P(T = n) = a^{n-1} + (n-1)ca^{n-2} = na^{n-1}$ (puisque $c = a$).

Exercice 4: `inspiré d'EML S 2020`

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - x$ et $P_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.
Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{2(n+1)+1} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{2n+3} \frac{(-x)^k}{k!} = P_n(x) + \frac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-x)^{2n+3}}{(2n+3)!}$ d'après la relation de Chasles $= P_n(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{x^{2x+3}}{(2n+3)!}$, puisque $(-x)^k = (-1 \times x)^k = (-1)^k x^k$; donc si k est pair, $(-x)^k = x^k$ et si k est impair $(-x)^k = -x^k$.

2. (a) P_n est une fonction polynômiale donc équivalente à l'infini à son terme de plus haut degré.
$P_n(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{k!} = -\frac{x^{2n+1}}{k!}$ Donc $P_n(x) \underset{x \to +\infty}{\to} -\infty$ et $P_n(x) \underset{x \to -\infty}{\to} +\infty$

(b) Comme P_n est continue sur $\mathbb{R}$, et que $0 \in]-\infty, +\infty[$ alors, d'après le th des valeurs intermédiaires il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_n(x) = 0$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est polynômiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
$P_n'(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} -k\frac{(-x)^{k-1}}{k!} = 0 - \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!} = -\sum\limits_{j=0}^{2n} \frac{(-x)^j}{j!} = -(\sum\limits_{j=0}^{2n+1} \frac{(-x)^j}{j!} - \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(b) * Supp que P_n a une racine a d'ordre supérieur ou égal à 2 : alors $P_n(a) = 0$ et $P_n'(a) = 0$. Or d'après (a) $P_n'(a) = -P_n(a) - \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ donc $\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ donc $a = 0$. Mais $P_n(0) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{(0^k}{k!} = 1 \neq 0$, contradiction.

4. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, , par linéarité, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{x}{2k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

(b) * Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le (a), Si $x > 2n + 1 > 0$ alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $x > 2k + 1$ et $\frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) < 0$ donc $P_n(x) < 0$. Si $0 < x < 1$ alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $x < 2k+1$ et $\frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) > 0$ donc $P_n(x) > 0$
Enfin, si $x \leq 0$ alors $P_n(x) < 0$, donc, les racines de P_n sont dans $[1; 2n + 1]$.

5. (a) D'après le 2. (a) en $n + 1$, $P_{n+1}'(x) = -P_{n+1}(x) - \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} = -\sum\limits_{k=0}^{2n+3} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = -\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{(-x)^{2n+3}}{(2n+3)!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$, fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P_{n+1}''(x) = \left(P_{n+1}'\right)'(x) = -P_n'(x) - \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(2n+2)!}$ et d'après 2a) $= P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(2n+2)!} = P_n(x)$.

(b) * Par récurrence : On a $P_0 : x \mapsto -x+1$ donc, P_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois en $u_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté $u_n \in [1, 2n+1]$.
On connait donc le signe de P_n et donc celui de P_{n+1}" d'après (a).
On peut ainsi suivre l'indication de l'énoncé, et faire le TV de P'_{n+1}.

x	$-\infty$		u_n		$+\infty$
$P_n(x) = P''_{n+1}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe $P''_{n+1}(x)$		$+$	0	$-$	
$P'_{n+1}(x)$		$\nearrow$	$P'_{n+1}(u_n) < 0$	$\searrow$	
signe $P'_{n+1}(x)$		$-$	$-$	$-$	
$P_{n+1}(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

Justification de $P'_{n+1}(u_n) < 0.$: $P_n(u_n) = 0$ donc d'après le (a), $P'_{n+1}(u_n) = -P_n(u_n) - \frac{(u_n)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0$ car $u_n > 0$.

Donc P_{n+1} est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{x\to+\infty} P_{n+1}(x), \lim_{x\to-\infty} P_{n+1}(x)[= \mathbb{R}$. Et comme $0 \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$. Il reste à ccl.

6. (a) On a, pour tout x réel : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$ donc $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{x}{2n+3}\right)$ et en particulier $P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + \frac{(u_n)^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)$ et comme $P_n(u_n) = 0$, $P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)$

(b) D'après (a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(u_n) = 0$ car $0 < 1 \leq u_n \leq 2n+1 < 2n+3$ donc $\frac{u_n}{2n+3} < 1$. Donc $P_{n+1}(u_n) > 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$ Et comme P_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $u_n < u_{n+1}$.