CALCUL : à consommer SANS modération !

2022/2023

FRACTIONS

Exercice 1: Simplifier les expressions suivantes (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

(a) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{11}{10}$ (b) $\dfrac{1}{36}-\dfrac{1}{45}+\dfrac{1}{9}$ (c) $\dfrac{3}{\frac{3}{7}}$ (d) $\dfrac{1}{\frac{63}{40}\times\frac{16}{27}}$ (e) $\dfrac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{3}}$ (f) $\dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$ (g) $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{12}{5}$

(h) $\dfrac{7}{18}-\dfrac{13}{60}$ (i) $\dfrac{7}{12}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}$ (j) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{12}$ (k)$(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{4})\times(\dfrac{9}{4}+\dfrac{21}{6})$ (l) $\dfrac{\frac{26}{18}\times\frac{-45}{7}}{\frac{39}{14}}$

Exercice 2: Lorsque les fractions sont simplifiables, les écrire sous forme de fractions irréductibles

(a)$\dfrac{35}{91}$ (b) $\dfrac{89}{29}$ (c) $\dfrac{123}{312}$

Exercice 3: Comment peut-on simplifier les expressions suivantes (où $a, b, x \in \mathbb{R}$) ?

(a) $\dfrac{2x+3}{2}$, (b) $-\dfrac{(4x-3)-(2x+3)}{2}$ (c) $\dfrac{2}{2x+3}$ (d)$\dfrac{3x-6}{-3}$ (e)$\dfrac{a^4-b^2}{a^2-b}$

Exercice 4:

1. Montrer que pour tous réels a, b tels que $0 < a \leq b$, alors $\frac{a}{b} \leq \frac{a+1}{b+1}$.

2. Classer alors les nombres suivants par ordre croissant : $\frac{17}{101}$, $\frac{5}{33}$, 0.16, $\frac{1}{7}$

Exercice 5:

1. Montrer que pour tous réels a, b, c, d strictement positifs, on a : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad > bc \Longleftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

2. Classer les nombres suivants par ordre croissant : $\frac{1000}{1001}$, $\frac{2000}{2003}$, $\frac{3000}{3005}$

FACTORISATIONS, IDENTITES REMARQUABLES ET RACINES CARREES

Exercice 6: Factoriser : (a) $2x^2-x-1$ (b) x^3+2x^2+x et développer : (c) $(x-2)^3$

Exercice 7: Développer et simplifier les expressions suivantes :
$A=(3x+3)^2-(-6+x)^2$ et $B=(2+x)^2-(2-x)(2+x)$ et $C=(x-3)^3$.

Exercice 8: Factoriser les expressions suivantes (ne pas commencer par tout développer !) :
$A=(3x-1)(4x+x^2)-x(3x-1)$, $B=(2x-1)^3-(2x-1)$ et $C=(x+3)(x^2-4)-(x^2+4x+4)(x-2)$.

Exercice 9: Simplifier :

$A=(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)$ $B=(2\sqrt{3}-5)^2$ $C=\sqrt{6}\sqrt{14}\sqrt{7}$ (*on pourra commencer par écrire* $14=2\times7$)

$D=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ $E=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $F=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$.

Exercice 10: Trouver deux entiers relatifs a et b tels que $\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$.

Exercice 11: Simplifier $\sqrt{(x-1)^2}$ lorsque $x \leq 1$ et $\sqrt{(1-2x)^4}$ lorsque $x \in \mathbb{R}$

PUISSANCES

Exercice 12: Mettre sous forme d'une puissance de 2 (où $n \in \mathbb{N}$) (attention, il y a un intrus ?)

(a) $2^{12}\times(2^3)^6$ (b) $(-2)^{2020}$ (c) $\frac{8^4}{4^4}$ (d) 4^{-5} (e) $\frac{2^3}{\sqrt{2}^3}$ (f) $(\sqrt{2})^{4n}$ (g) $(-4)^n$ (h) $(-\sqrt{2})^{2n+1}$

Exercice 13: Exprimer en fonction de q^n les expressions suivantes lorsque $n \in \mathbb{N}$, et $q \in \mathbb{R}^*$

(a) q^{n+1} (b) q^{n-1} (c) q^{-n+1} (d) q^{2n} (e) q^{2n-1} (f) $q^{n+1}-q^n$ (g) $\dfrac{q^{2n+1}}{\sqrt{q}\times q^{n-1}}$ (avec $q>0$)

Exercice 14: Mettre les expressions suivantes sous la forme $a\times b^n$ ($n \in \mathbb{N}$ fixé) avec a et b des réels à déterminer.

(a) 5^{2n-1} (b) $(-1)^n\times2^{n+1}$ (c) $\frac{1}{3^n}$ (d) $\frac{2^{n+1}}{5^{n-2}}$ (e) $(-1)^{n+1}\times\frac{2^{n-1}}{3^{3n}}$ (f) $2^{n-1}\times3^{2n+1}$ (g) $3^{n+2}\times5^{3n-1}$

Exercice 15: Soit $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $r^{2^{k+1}}$ en fonction de r^{2^k}.

Exercice 16: Comparer 2^{222} et 22^{22}.

Exercice 17: Simplifier (a) $\dfrac{(-18)^7\times2^4\times(-50)^3}{(-25)^4\times(-4)^5\times(-27)^2}$ et (b) $\dfrac{(-36)^2\times(18)^4}{(12)^3\times(-81)^3}$

EXPONENTIELLE et LOGARITHME

Exercice 18: Simplifier : (a) $\ln(e^2)$ (b) $e^{3\ln 2}$ (c) $\ln(12)-\ln(6)$ (d) $e^{-\ln(3)}$ (e) $\dfrac{\ln(2)}{\ln(16)}$

Exercice 19: Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les expressions suivantes :
(a) $\ln(2)+\ln(4)$ (b) $\ln(2)-\ln(8)$ (c) $\ln(4\sqrt{2})$ (d) $\ln(\frac{8}{\sqrt{2}})$

Exercice 20: Simplifier les expressions suivantes lorsque $t>0$: (pour (c), (d), (e), il suffit $t\in\mathbb{R}$)
(a) $e^{2\ln(t)}$ (b) $e^{-\ln(t)}$ (c) $\dfrac{e^{2t+\ln 3}}{e^t}$ (d) $\ln\left(\frac{1}{e^{2t}}\right)$ (e) $\ln\left(\frac{e^{2t-1}}{e^{-t}}\right)$

Exercice 21: Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'inverse du nombre $e^{-x}+1$ est le nombre $\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Exercice 22: Montrer que pour tout réel t, $\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}=\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}$

Exercice 23: Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1}$ est aussi égal à (une seule bonne réponse) : (a) $\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ (b) $\frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$ (c) $\frac{e^x-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

INEGALITES

Exercice 24: Trouver le signe des quantités suivantes en fonction de $x\in\mathbb{R}^*$ (et $x\neq 1$ pour (a)).
(a) $\dfrac{1-2x}{x(x+1)}$ (b) x^3-x^2-2x (c) $x^2+x+1+\dfrac{1}{x^2}$ (d) $x-3+\dfrac{2}{x}$

Exercice 25: Soit 4 réels a,b,c, et d tels que $a\geq 3$, $b\geq 4$, $c\geq -2$ et $d\leq -1$. Donner lorsque c'est possible une majoration et/ou une minoration de (une justification est attendue !) :
(a) $a+b+c$ (b) $-2a$ (c) $d-a$ (d) a^2 (e) c^2 (f) e^d (g) ab (h) ac (i) ad

Exercice 26: Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x-1\geq x$ puis montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $2^n\geq n$.

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

Exercice 27: A l'aide des représentations graphiques des fonctions usuelles, représenter les fonctions suivantes, après avoir spécifié leur ensemble de définition. On on pourra vérifier son intuition en faisant le TV complet de la fonction.
(a) $x\mapsto e^x+1$ (b) $x\mapsto\ln(\frac{1}{x})$ (c) $x\mapsto(x+1)^3$ $x\mapsto e^{-x}$ $x\mapsto\sin(2x)$.

DERIVATION

Exercice 28: Calculer les dérivées des fonctions f définies par les formules suivantes (on ne cherchera pas l'ensemble de définition ni de dérivation de ces fonctions) :
(a) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$ (b) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{4}$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (d) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$ (e) $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$ (f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
(g) $f(x)=\cos(x)-\sin(x)+5$ (h) $f(x)=x^4\cos(x)$ (i) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$ (j) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ (k) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
(l) $f(x)=\dfrac{5}{\ln(x)}$ (m) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (n) $f(x)=e^{2x}-3e^{-4x}$ (p) $f(x)=e^{-x}\cos(3x)$ (q) $f(x)=\dfrac{e^{2x}+x}{\sin(x)}$.

Exercice 29: Calculer le plus vite possible les dérivées des fonctions f définies par les formules suivantes, SANS utiliser de formule de composition (type e^u ou $\ln(u)$) :
(a) $f(x)=\dfrac{1}{e^{-x}}$ (b) $f(x)=\ln(2x)$ (pour $x>0$) (c) $f(x)=\sqrt{2x}$ (pour $x>0$)

Exercice 30: Calculer les dérivées des fonctions f définies par les formules suivantes (toujours sans s'occuper du domaine de définition) :
(a) $f(x)=\ln(x^2+1)$ (b) $f(x)=e^{3x^2-4x+1}$ (c) $f(x)=(\sin x)^4$
(d) $f(x)=\sqrt{x^4+x^2+1}$ (e) $f(x)=\dfrac{e^{1/x}+x^2}{(x^2+x+1)^3}$

Exercice 31: On pose pour tout $x>0$: $f(x)=2\ln(x)-x+\dfrac{1}{x}$
Déterminer le signe de la dérivée de f. En déduire le signe de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 32: Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{b}$ pour tout $x>0$.

1. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
2. En déduire que $\forall x>0$, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$