

exercice 15 : recherche de DL

a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

par produit : $\ln(1+x) \times \cos x = (\quad) \times (\quad)$

$= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

b) $\sinh x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$; comme $2x \rightarrow 0$

$\sinh 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

c) $x e^{2x+1} = x e^{2x} \times e$

en fait l'ordre 2 suffirait
car $x \times x$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$;

et $c(x) = x \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) \right) \times e$
 $= 2x + 2ex^2 + 2ex^3 + o(x^3)$

d) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

(il faut aller à l'ordre 5
car $x \times \frac{1}{x^2} \rightarrow$ ordre $5-2=3$)

d'où $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + o(x^3)$

e) fait en cours

f) Il faut revenir à Taylor-Young : f : très au-dessus C^∞

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$

on a cherché $0 = 0$

$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

donc $f'(0) = 1$

et $f''(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$ donc $f''(0) = 0$

cel. au-dessus $x = x + o(x^2)$

exercice 16 : "tenta en DL" d'ordre 2. Si cela n'est pas suffisant
chercher l'ordre suivant !

$$\begin{aligned} \textcircled{a)} \quad e^x - \cos(x) - \sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (x + o(x^2)) \\ &= x^2 + o(x^2) \quad \text{d'où } e^x - \cos(x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{b)} \quad \ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\textcircled{c)} \quad e^{x+1} = e^x \times e$$

$$\text{d'où } e^{x+1} - (1+x)^e - (e-1) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times e - \left(1 + ex + \frac{e(e-1)}{2} x^2 + o(x^2)\right) - (e-1)$$

$$= e + ex + e\frac{x^2}{2} - 1 - ex - \frac{e(e-1)}{2} x^2 - (e-1) + o(x^2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} e(1 - (e-1))}_{\neq 0} x^2 + o(x^2)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} e(2-e) x^2$$

$$\text{car } e^u = 1 + u + \frac{1}{2} u^2 + o(u^2) \text{ avec } u = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

exercice 17 : but utiliser le critère par équivalence

$$\begin{aligned} &\text{et } o\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2\right) \\ &= o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad u_n = e^{2/n} - 1 - \frac{2}{n} = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\right) - 1 - \frac{2}{n}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

donc à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$

De plus $\forall n \geq 1, \frac{2}{n^2} \geq 0$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^2}$ cv

(Riemann, $\alpha = 2 > 1$) donc par critère, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ cv.

$$\textcircled{2} \quad v_n = 1 + \frac{1}{n^2} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n^2} - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\right)$$

$$\begin{aligned} &\text{car } \cos(u) \\ &= 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \end{aligned}$$

$$\text{en } u = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{2} \times \frac{1}{n^2}$$

→ m rédaction : cv

$$\textcircled{3} \quad w_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right) \right) - 1$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6} \frac{1}{n^2}$$

parce par $|w_n|$ ①

parce par $-w_n$ ②

réduction ① $|w_n| \sim \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \rightarrow$ critère

donc la série $\sum |w_n|$ cv, ce qui signifie que la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ cv absolument donc cv.

réduction ② à privilégier (car la série pourrait cv sans cv abs.)

$$-w_n \sim \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2}$$

à partir d'un certain rang $-w_n \geq 0$

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \geq 1$$

critère ...

donc la série $\sum_{n \geq 1} -w_n$ cv, et donc par linéarité, la série $\sum w_n$ cv

exercice 18 : but : dans une fraction, faire apparaître des équivalents mais n^+ et n^- , passer par les DLs pour trouver un eq

$$\textcircled{a) \quad \ln(1+x) - x = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{car} \quad x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (FI \frac{0}{0})$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{b) \quad \text{au dénom} : \text{DL inutile car } e^x - 1 \sim x \text{ donc } x(e^x - 1) \sim x^2$$

$$\text{au num: } (x-1)e^x + 1 = (x-1)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + 1 \quad (FI \frac{0}{0})$$
$$= \dots = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{d'où par quotient} \quad \frac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x - 1)} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{c) \quad \sqrt{1+2x} - (1+x) = \left(1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2)\right) - (1+x) \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$\text{d'où par quotient} \quad \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \quad (FI \frac{0}{0})$$

$$\text{car } \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) \text{ avec } u = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et } o(4x^2) = o(x^2)$$

d) $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ (ép usuel) donc pas de DL nécessaire

$$\begin{aligned} e^x - 1 - \sin x &= (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - 1 - (x + o(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &\sim \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \quad (Fl \frac{0}{0})$$

par quotient: $\frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$

e) transformer l'écriture car pas de DL de $\frac{1}{\sin t}$

Fl $\frac{0}{0}$

on $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t - t}{t \sin t}$ $t \sin t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \times t = t^2$

et $\sin t - t = (t - \frac{1}{3!}t^3 + o(t^3)) - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}t^3$

d'où $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \sim \frac{-\frac{1}{6}t^3}{t^2} = -\frac{1}{6}t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

f) $-\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{-\sin^2(t) + t^2 \cos(t)}{t^2 \sin^2(t)}$

on $t^2 \sin^2 t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2 \times t^2 = t^4$

$$\begin{aligned} -\frac{\sin^2(t) + t^2 \cos(t)}{\sin(t) \times \sin(t)} &= -\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) + t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\ &= -\left(t^2 - \frac{t^4}{6} + o(t^4) - \frac{t^4}{6}\right) + t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4) \\ &= -\frac{1}{6}t^4 + o(t^4) \sim -\frac{1}{6}t^4 \end{aligned}$$

par quotient: $-\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \sim -\frac{1}{6} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\frac{1}{6}$

exercice 2.5

$f(x) = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2}x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$
 ép tangente ≥ 0

$f(x) - (1 - \frac{1}{2}x) = \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \geq 0$ proche de 0 $\rightarrow \mathcal{C}_f$ au-dessus de la tangente

$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$
 ép tangente ≥ 0 donc $\mathcal{C}_g$ au-dessus de la tgte localement