Feuille d'exercices 22 : Compléments d'analyse

2022/2023

Dérivées successives

Exercice 1:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^n sur leur ensemble de définition, et déterminer leur dérivée n^{ie} : $f_1(x) = xe^{-x}$ $f_2(x) = x^2e^x$

$f_3(x) = (ax+b)^k$, avec $k \in \mathbb{N}$ $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$ $f_5(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ $f_6(x) = \frac{1}{ax+b}$

Exercice 2:

Soit la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
   On précisera la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Justifier que f est de classe C^∞ et préciser f' et f''.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = f^{(n)}(x)e^{x^2}$. Préciser P_0, P_1 et P_2.
3. Mq pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
   On raisonnera par récurrence, et on commencera par trouver une relation entre P_{n+1} et P_n.
4. Applications :
   (a) En déduire l'existence et le calcul des limites en $\pm\infty$ de $f^{(n)}$.
   (b) Justifier que la famille $f, f', f'', ..., f^{(n)}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

Exercice 4: *pour s'entraîner et aller plus loin*

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. ** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On pourra commencer par déterminer P_0, P_1 et P_2.*
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme unitaire de degré $2n$.
5. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f_n^{(k)}$.
2. En calculant $f_{2n}^{(n)}$ de deux manières différentes, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Formules de Taylor

Exercice 6: *pour aller plus loin*

A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

a) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{1}{2}x^2$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

d) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$

Exercice 7:

Soit P une fonction polynômiale de degré $n \geq 2$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a), P'(a), ..., P^{(n)}(a)$ soient tous strictement positifs. Montrer que P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Exercice 8:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x-a, x \mapsto (x-a)^2, ..., x \mapsto (x-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Donner l'expression des coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ dans cette base.

Exercice 9:

On pose pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0,1]$ et déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$.
2. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et 1 à l'ordre n.
   Qu'en déduit-on sur la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$?
3. Autre méthode : posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
   (a) Montrer que la suite (I_n) converge vers 0, puis calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_{k-1} + I_k$.
   (b) Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ en fonction des intégrales (I_k). Qu'en déduit-on sur la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$?

Exercice 10:

Le but de cet exercice est de déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de : $\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

1. Montrer que la suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$ à l'aide des sommes de Riemann.
2. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{ex^2}{2}$.
3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}| \leq \frac{e}{2n}$. Conclure.

Exercice 11:

Pour tout $x > 0$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$, avec $n \geq 0$.

1. Montrer que la série converge. On note $g(x)$ la somme de la série. Que vaut $g(1)$?
2. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \geq 0$: $|e^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{k!}| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. a) Montrer alors que pour tout $x \geq 1$, $|\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!(k+x)}| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{x+n+1}$.
   b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du = g(x)$.
   bonus : montrer que le résultat précédent reste vrai si $0 < x < 1$.

Exercice 12: *le grand classique des sujets EML*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer la monotonie de f.
   c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis $-\infty$, et dresser le TV de f en précisant $f(0)$.
2. (a) Montrer que pour tout $u \in [-1,1]$, $|e^{-u} - 1 + u| \leq \frac{3u^2}{2}$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
   (b) En déduire que :$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in [-1,1] - \{0\}$, $\forall t \in [0,1]$, $|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}| \leq h^2 \frac{3t^2}{2} e^{-xt}$
   puis que $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt\right| \leq \frac{3|h|}{2} \int_0^1 \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$.
   (c) En déduire que f est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt$.

Exercice 13: *

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ est convergente.
2. Montrer que pour tout réel x, $G(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}dt$ existe.
3. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $G(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)e^{-t}}{t}dt$ existe.
5. * Montrer que pour tout $(t,x,h) \in \mathbb{R}^3$, $|\sin(t(x+h) - \sin(tx) - th\cos(tx)| \leq \frac{t^2h^2}{2}$.
6. Soit $(x,h) \in \mathbb{R}^2$. Majorer $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right|$ en fonction de h.
7. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = G(x)$.
8. En déduire F.

Exercice 14: *un autre pour s'entraîner*

1. Montrer que pour tout réel x, les intégrales $S(x) = \int_0^1 \sin(xt)e^{-t^2}dt$ et $C(x) = \int_0^1 t\cos(xt)e^{-t^2}dt$ existent.
2. A l'aide de l'inégalité de T-L, montrer : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$: $|\sin(a+y) - \sin a - y\cos a| \leq \frac{y^2}{2}$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\forall t \in [0,1]$: $\left|\frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t\cos(xt)e^{-t^2}\right| \leq \frac{|h|}{2}t^2e^{-t^2}$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$: $\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 t^2e^{-t^2}dt$.
5. Montrer alors que S est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée S'.

Développements limités

Exercice 15: *pour s'entraîner*

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes : a) $x \mapsto \ln(1+x)\cos(x)$
b) $x \mapsto \sin(2x)$ c) $x \mapsto xe^{2x+1}$ d) $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ e) $x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$ f) $x \mapsto \arctan x$ (ordre 2)

Exercice 16:

En utilisant un développement limité à un ordre convenable, donner un équivalent simple en 0 de :
a) $e^x - \cos(x) - \sin(x)$ b) $\ln(1+x) - x$ c) $e^{x+1} - (1+x)^e - (e-1)$

Exercice 17:

Etudier la nature des séries de terme général défini par :
$u_n = e^{2/n} - 1 - \frac{2}{n}$ $v_n = 1 + \frac{1}{n^2} - \cos(\frac{1}{n})$ $w_n = n\sin(1/n) - 1.$

Exercice 18: `Ecricome S 2016`

On note pour tout $n \geq 1$, $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) Rappeler un DL d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$.

b) Montrer alors que $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge.

Exercice 19:

Déterminer les limites suivantes en 0 :
a) $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ b) $\frac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}$ c) $\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$ d) $\frac{e^x-1-\sin x}{\cos x - 1}$ e) $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ f) $-\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}$

Exercice 20:

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{a_n}{n})^n e^{-a_n} = 1$.

Exercice 21:

Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage de 0. Déterminer la limite en 0 de $\frac{f(x)+f(-x)-2f(0)}{x^2}$.

Exercice 22:

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

Exercice 23:

On note f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x(2+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.
2. Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
3. Préciser alors la position locale de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 24: *pour s'entrainer*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser f'.
3. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand $x \to 0$. Qu'en déduit-on ?
4. Etudier le signe de f'. On pourra introduire une fonction auxiliaire ....

Exercice 25:

A l'aide d'un DL, étudier le comportement de f au voisinage de 0, préciser la tangente éventuelle ainsi que sa position localement : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

Exercice 26: *Une annale pour réviser !*

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. (a) Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser f'.
   (c) Montrer $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.
   (d) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) Etudier la fonction $u : x \mapsto (1-x)e^x - 1$.
   (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.
   (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On précisera la tangente en 0.
3. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α que l'on calculera.
   (b) Etablir : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
   (d) Etablir : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$.
   (e) Conclure quant à la nature de la suite.
   (f) Ecrire un programme python qui donne une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
4. On note G l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.
   (a) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (b) Déterminer les limites de G en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variations complet de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.