Exercice 1: *pour s'entraîner*

Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k \to 2k+1 \end{array}$ f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2:

Pour les fonctions ci-dessous, calculer l'image de a par l'application f et déterminer l'ensemble des antécédents de b par f. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f. Si f est bijective, déterminer alors f^{-1}.

1. $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ avec $a = 2$ et $b = \frac{1}{2}$.
2. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ avec $a = -1$ et $b = 0$.
3. $f : \mathbb{R}^+ \to]0, 1]$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ avec $a = 0$ et $b = 2$.

Exercice 3:

On pose $f : A \to B$ avec $f(x) = x^2$. Préciser dans tous les cas suivants, si f est injective, surjective, bijective. On pourra représenter graphiquement les différentes fonctions et justifier brièvement.

1. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$
2. $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$
3. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}^+$
4. $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}^+$
5. $A = \mathbb{R}^-$, $B = \mathbb{R}^+$
6. $A = \mathbb{R}^-$, $B = \mathbb{R}^-$

Plus généralement, pour quels valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $x \mapsto x^n$ bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 4:

On pose $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ l'application définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et g la restriction de f à $[1, +\infty[$.
Montrer que f n'est pas injective puis que g est injective mais pas surjective.

Exercice 5:

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y, x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y) \end{array}$

1. Déterminer $f((0, 0))$ et $f((1, 2))$, $g((1, -1, 0))$ et $g((1, 1, 1))$.
2. $(0, 0)$ admet-il des antécédents par g ? Les déterminer, le cas échéant. *Bonus* : même question avec $(1, 2)$.
3. g est-elle injective ? Montrer alors que g est surjective.
4. Montrer que f est injective.
5. Montrer que $(1, 1, 2)$ n'a pas d'antécédent par f. Qu'en déduit-on ?
6. Définir $f \circ g$ puis $g \circ f$

Exercice 6: *pour s'entraîner*

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x + z, 2x + y + z) \end{array}$

1. Caculer $f(1, -1, -1)$. f est-elle injective ?
2. Montrer que f n'est pas surjective. *indication : remarquer que $2x + y + z = (x + y) + (x + z)$ pour deviner l'expression des images et trouver un contre-exemple*

Exercice 7:

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$
On pourra commencer par montrer que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ ... puis raisonner par récurrence.

Exercice 8:

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{l}]a, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x-a} \end{array}$. Montrer que f est bijective de $]a, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer f^{-1}.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer g^{-1}.

Exercice 9: *pour s'entraîner*

1. Montrer que les applications f et g suivantes sont bijectives et déterminer leur réciproque.
   $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x - y) \end{array}$ $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - y, x + 3y) \end{array}$
2. L'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = 2x + y$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 10:

On considère les applications $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x - y, y - x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x + 2y) \end{array}$
Déterminer $f \circ g$ puis $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11:

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_1$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

1. Vérifier rapidement que pour tout $x \in \mathbb{R} - 1$, $f(x) \neq 1$.
2. Montrer alors que $f \circ f = id_{\mathbb{R}-\{1\}}$.
3. Retrouver alors le résultat d'un exercice précédent !

Exercice 12: *abstrait mais très formateur*

Soit deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si

1. si $g \circ f$ est injective sur E alors f est injective sur E.
2. si $g \circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G.
3. ** Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
4. ** Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective

Exercice 13: *encore un peu de composée ...*

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{<n>} = f \circ f \circ ... \circ f$ (composée successive de f n fois). Déterminer $f^{<2>}$ et $f^{<3>}$. Conjecturer une expression de $f^{<n>}$ et le démontrer.

Exercice 14:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bijective et impaire. Montrer qu'alors f^{-1} est encore impaire.

Exercice 15:

Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x$ pour $x > 0$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.
2. (a) Montrer qu'il existe une fonction g définie sur $I = [-\frac{1}{e}, +\infty[$ telle que : $\forall x \in I$, $g(x) \ln(g(x)) = x$.
   (b) Justifier que la fonction g est unique.
3. Dresser le tableau de variations complet de g, puis tracer sur un même graphique, les courbes de f et de g.

Exercice 16: *pour aller plus loin*

Soit E, F, G et H quatre ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 17: *pour s'entraîner et réviser ....*

On considère la fonction f définie par : $f(t) = t + \frac{1}{t}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis dresser le tableau de variations complet de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$. On notera g sa bijection réciproque.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Déterminer l'expression de g.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n)$.

4. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
5. Ecrire une fonction python, qui au paramètre d'entrée n renvoie la valeur de u_n.
6. Montrer que la suite u est croissante. On admettra qu'elle converge vers un réel ℓ.
7. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k)$. Mq la suite v converge et déterminer sa limite (en fonction de ℓ).