Feuille d'exercices 23 : Applications linéaires et matrices

2022/2023

Exercice 1:

Déterminer la matrice relative aux applications linéaires suivantes dans les bases canoniques :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (2x-y, x+y, x)$ et 2. $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $P \mapsto P(x+1)$

Exercice 2:

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f((x,y)) = (4x-6y, x-y)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice de f relativement à la base ((1,1),(1,-1)) (départ) et à la base canonique (arrivée).
3. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique (départ) et à la base ((1,1),(1,-1)) (arrivée).
4. Déterminer la matrice de f dans la base $((2,1),(3,1))$.

Exercice 3:

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on définit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer $f((x,y,z))$ pour tout triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ via 2 méthodes.
2. Déterminer le noyau de f via 2 méthodes puis l'image de f. La première question était-elle nécessaire ?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est B.

Exercice 4: *pour s'entrainer*

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

On appelle $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ celle de $\mathbb{R}^2$.
On pose alors $e_1' = e_2 + e_3$, $e_2' = e_3 + e_1$, $e_3' = e_1 + e_2$ et $f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, $f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}' = (f_1', f_2')$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer alors les matrices suivantes : $Mat_{\mathcal{F},\mathcal{B}'}(u)$, $Mat_{\mathcal{F}',\mathcal{B}'}(u)$, puis $Mat_{\mathcal{F}',\mathcal{B}}(u)$

Exercice 5:

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (*pour s'entrainer* : refaire avec $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$)

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à M. Déterminer le noyau et l'image de f. *On privilégiera la méthode matricielle.*
2. Soit $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est M. Déterminer le noyau et l'image de g. *On privilégiera la méthode matricielle pour utiliser les calculs faits au 1.*
3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de E. On introduit h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M. Déterminer le noyau et l'image de h.

Exercice 6:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application $\varphi : \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = AM$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $f(P) = xP'$.

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ puis écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$? Déterminer une base de $Im(f)$ puis une base de $Ker(f)$.

Exercice 8:

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P - P'$.

1. Montrer que Φ est linéaire et déterminer la matrice de Φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. L'application Φ est-elle bijective ?

Exercice 9: *un peu plus abstrait ...*

Soit E un espace de dimension 3, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ soit une base de E.
2. Ecrire la matrice de f dans cette base.
3. Généraliser ce résultat lorsque E est de dimension n et que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 10:

Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par $\Phi(P) = 3xP' + (x^2 - 1)P''$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice de Φ dans la base canonique de E.
3. Φ est-elle un isomorphisme ? Déterminer alors $Ker(\Phi)$ et $Im(\Phi)$.

Exercice 11:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $f^2 = f^3$.

Exercice 12:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}. (On essaiera deux méthodes)

Exercice 13: `Eml S 2007`

On note n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et Φ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par $\Phi(P) = ((x^2 - 1)P)''$.

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice M de Φ dans la base canonique de E.
3. Montrer que Φ est un isomorphisme de E.
4. Dans le cas $n = 2$, déterminer Φ^{-1} à l'aide de la représentation matricielle.
   Comment aurait-on pu faire autrement ?

Exercice 14:

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 6. $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 7. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérification avec python : bibliothèque `numpy.linalg` syntaxe `al.rank(...)`.

Exercice 15:

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 2)\}$. *On essaiera les deux méthodes.*
2. Même question avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$

Exercice 16: *pour s'entrainer*

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base fixée de $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ où l'on a posé $v_1 = -e_1$, $v_2 = 2e_2 + e_3$ et $v_3 = -e_2$.

Et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice dans la base $\mathcal{B}$ suivante : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $Mat_{\mathcal{C}}(f)$.

Exercice 17:

Soit f l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On pose $e_1 = (-2, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice P de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
   Vérifier que P est inversible et déterminer son inverse.
3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Que remarquez-vous ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la matrice de f^n dans la base canonique. En déduire l'expression de f^n.

Exercice 18: *on complique ...*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On définit pour tout réel a l'endomorphisme Φ_a de E par $\Phi_a(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\Phi_a(e_2) = -e_1 + (a-3)e_2 + (a-1)e_3$ et $\Phi_a(e_3) = -2e_1 - 4e_2 + ae_3$

1. Ecrire la matrice de Φ_a dans la base $\mathcal{B}$
2. Montrer que Φ_0 est un isomorphisme et déterminer la matrice de sa réciproque, dans la base $\mathcal{B}$.
3. (a) Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles Φ_a est un isomorphisme.
   (b) Déterminer, pour chaque valeur du paramètre a, le noyau de Φ_a.
   (c) * Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ appartient à l'image de Φ_a.
4. On considère maintenant les trois vecteurs : $f_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_2 = 2e_1 + 4e_2 - e_3$, $f_3 = e_3$.
   Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et déterminer la matrice de Φ_1 dans cette base.

Exercice 19:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de f.
2. Sans calculs, donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Déterminer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Qu'en déduit-on pour f ?
5. En déduire $(B + 3I)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. * On pose $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On commencera par écrire M en fonction de A, puis en fonction de B ....

Exercice 20: *Pour aller un peu plus loin*

Rappel : Définition : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible si

Le but de cet exercice est de faire la preuve de la proposition vue dans le chapitre matrices :
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Soit A une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe bien une matrice $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.
On notera $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (resp. g) l'endomorphisme associé à A (resp. à B)

1. Quelle relation relie f et g ?
2. Montrer alors que f est surjective. *bonus* : montrer que g est injective.
3. En déduire que f est bijective et que $g = f^{-1}$.
4. Conclure.

Exercice 21: *Pour aller plus loin*

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. En déduire u^k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
2. En déduire M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 22: *Pour aller plus loin*

Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 ssi il existe deux matrice lignes non-nulles $U, V \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M =^t UV$.

Exercice 23: *Pour aller plus loin*

Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de rang 1.

1. ** Montrer que h satisfait une et une seule des deux propriétés suivantes :
   (A) $Im(h) \oplus Ker(h) = \mathbb{R}^3$ (B) $Im(h) \subset Ker(h)$.
2. On suppose que h satisfait la propriété (A). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de h est égale à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où λ est un nombre réel non nul. Que vaut alors h^2?
3. On suppose que h satisfait la propriété (B). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de h est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut alors h^2?