Exercice 1:

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1 + x_2)$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto (2x_1x_2, x_1 - x_2)$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x + 3y$$

Exercice 2:

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, x + 2y, y)$$

$$\text{et } g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + z, 5x - 2y + z).$$

- (a) Montrer que f est linéaire.
(b) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- Reprendre ces deux questions pour g .
- Montrer que $g \circ f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et préciser $(g \circ f)^{-1}$.

Exercice 3: *pour s'entraîner*

Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer une base de leur noyau et de leur image (*bonus : faire les 2 méthodes pour l'image*). Préciser enfin si elles sont bijectives.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, y + z, x + 2y)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y - z, y - 2z)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, 0)$$

Exercice 4:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement $(1, -1, 2)$, $(-3, 2, -1)$, $(-7, 4, 1)$.

- Donner $f(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
- Déterminer les antécédents de $u = (-1, -1, 8)$ et de $v = (-2, 1, 3)$. f est-elle injective? surjective?
- Déterminer une base du noyau et de l'image de f .

Exercice 5: *pour s'entraîner*

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $g((1, 1, 1)) = (0, 1, 1)$, $g((1, 2, 3)) = (1, 1, 1)$ et $g((0, 1, 1)) = (1, 2, 3)$.

- Montrer que la famille $((1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $\vec{x} = (x, y, z)$ dans cette base.
- Justifier que g ainsi définie existe bien et est unique.
- g est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6:

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application définie par : $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(A) = AM - MA$.

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de son noyau et de son image.

Exercice 7: *un peu plus abstrait*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = AM$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On suppose que A est inversible. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1} .
- On suppose que f est surjective. Montrer que A est inversible.

Exercice 8:

On considère l'application $h : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $h(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$.

- Montrer que h est linéaire.
- Déterminer une base de l'image. L'application est-elle bijective?
- bonus* : Déterminer une base du noyau de h .

Exercice 9: *pour s'entraîner*

On considère l'application $h : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $h(P) = (P(0), P(1), P(2))$.

- Montrer que h est linéaire.
- Déterminer le noyau et l'image de h .
- L'application est-elle injective? surjective? bijective?

Exercice 10:

Soit f l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(P)(x) = 2P(x) - xP'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer le noyau de f : est-elle injective ?
3. Déterminer l'image de f : est-elle surjective ?
4. Reprendre les questions 1. et 3. lorsque f est définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 11:

1. On pose les polynômes suivants : $U_0 : x \mapsto (x+1)^2$, $U_1 : x \mapsto x^2 + 1$ et $U_2 : x \mapsto x^2$.
Montrer que la famille (U_0, U_1, U_2) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. On définit maintenant $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ linéaire telle que $f((1, 0, 0)) = U_0$, $f((0, 1, 0)) = U_1$ et $f((0, 0, 1)) = U_2$.
Que sait-on sur f ? Préciser alors le noyau et l'image de f .

Exercice 12:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, par $f_n(P) = (x^2 - 1)P' - nxP$.

1. *Etude du cas particulier $n=2$*
 - (a) Montrer que f_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - (b) Déterminer une base du noyau de f_2 , puis une base de l'image de f_2 .
2. *Retour au cas général.*
 - (a) Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
 - (b) Déterminer l'image de f_n (on ne cherchera pas à en trouver une base).

Exercice 13:

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles. Soit f l'application qui à une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la suite $v = f(u)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1}$.

1. (a) Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$. Déterminer la suite $v = f(u)$.
(b) Même question avec la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (\frac{1}{2})^n$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E .
3. Déterminer son noyau (on pourra en proposer une base).
4. * Montrer que f est surjective.

Exercice 14: **pour aller plus loin*

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles. Soit f l'application qui à une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la suite $v = f(u)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer son noyau. On en précisera une base.
3. Montrer que f est surjectif.

Exercice 15:

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur E l'application T par : si $f \in E$, $T(f)$ est la fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Déterminer la fonction $T(f)$.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E .
3. Déterminer son noyau.

Exercice 16:

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x - y, x + y)$.

1. Montrer que g est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (=automorphisme) et déterminer la réciproque g^{-1} .
2. Donner l'expression de $g \circ g$.

Exercice 17: *fondamental*

Soit E, F, G trois espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. **exo du cours** : Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im} f \subset \text{Ker} g$.
2. Montrer que $\text{Ker} f \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im} g$.
3. On suppose dans cette question que $E = F$. Autrement dit, $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

Exercice 18:

Soit $f, g : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ les applications définies par $f(P) = xP$ et $g(P) = P'$.

1. Vérifier que f et g sont des endomorphismes de $E = \mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que $g \circ f - f \circ g = id_E$.
3. ** Montrer alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g \circ f^n - f^n \circ g = n f^{n-1}$.

Exercice 19:

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $(e_1; \dots; e_n)$ une famille de vecteurs de E .

1. On suppose que $(f(e_1); \dots; f(e_n))$ est une famille libre. Montrer que $(e_1; \dots; e_n)$ est libre.
2. * On suppose que f est injective et que la famille $(f(e_1); \dots; f(e_n))$ est génératrice de $Im(f)$. Montrer que $(e_1; \dots; e_n)$ est une famille génératrice de E .

Exercice 20: extrait d'Eml S 2014

On note E (resp. E_1) le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues (resp. de classe C^1).

On remarquera que E_1 est inclus dans E . Puis pour tout élément f de E , on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$.

1. Etablir que pour tout $f \in E$, $T(f) \in E_1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$.

On note dorénavant $T : E \rightarrow E$ l'application qui à f associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E .
3. Est-ce-que T est surjectif?
4. Soit $f \in E$. Montrer que si f est paire, alors $T(f)$ est paire.
5. On note $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer $T(s)$. Est-ce-que T est injectif?

Exercice 21:

On définit Φ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $\Phi(P) = P - P'$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Calculer pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Phi(U_k)$ où $U_k : x \mapsto x^k$.
3. Déterminer une base de $Im(\Phi)$.
3. * Déterminer $Ker(\Phi)$.

Exercice 22:

On définit $\Phi : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ et $u : \mathbb{R}_{n+2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $P \mapsto \Phi(P) = (x^2 - 1)P$ $P \mapsto u(P) = (P(1), P(-1))$.

1. Montrer que Φ et u sont des applications linéaires.
2. Montrer que Φ est injective.
3. * Montrer que $Im(\Phi) = Ker(u)$.
4. * Montrer que u est surjective.

Exercice 23: pour aller plus loin

On note $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit alors φ_1, φ_2 et φ_3 comme suit : pour tout $f \in E$, $\varphi_1(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt$, $\varphi_2(f) = \int_0^1 f(t) dt$ et $\varphi_3(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt$.

1. Montrer que φ_1 est une forme linéaire sur E . On pourra admettre qu'il en est de même pour φ_2 et φ_3 .
2. La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre?
3. Montrer que la famille (φ_1, φ_2) est libre.