Somme de sous-espaces vectoriels et supplémentaires

Exercice 1:

Posons $E = Vect((1,0,1),(-1,0,1))$ et $F = Vect((1,0,0),(0,1,0))$.
Montrer que $E + F = \mathbb{R}^3$. La somme est-elle directe ? *Proposer au moins deux arguments différents.*

Exercice 2: *pour s'entraîner*

Posons $E = Vect(x-1, x+2)$ et $F = Vect(x, x^2)$.
Montrer que $E + F = \mathbb{R}_2[x]$. La somme est-elle directe ?

Exercice 3:

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{u} = (1,0,1,0)$, $\vec{v} = (0,1,-1,0)$, $\vec{w} = (1,1,1,1)$, $\vec{x} = (0,0,1,0)$ et $\vec{y} = (1,1,0,-1)$.
Soit $F = Vect(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et $G = Vect(\vec{x},\vec{y})$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$?

Exercice 4:

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((1,0,0),(1,2,3))$. Déterminer un supplémentaire G de F dans E.

Exercice 5:

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3y + 4z = 0\}$ et $F = Vect((1,0,0))$. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. On précisera une base adaptée à cette somme directe. *Proposer (et faire !) au moins deux méthodes.*

Exercice 6:

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[x] | P(0) = P'(0) = 0\}$.
Montrer rapidement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$, puis déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[x]$. On précisera une base adaptée à cette somme directe.

Exercice 7:

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. antisymétriques) càd l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M$ (resp. ${}^tM = -M$).

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. (On raisonnera par analyse et synthèse).
3. A titre d'exemple, lorsque $n = 3$, donner la décomposition de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette somme directe.

Exercice 8: *pour s'entraîner*

Soit $E = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$ et $F = \{(\lambda, \lambda, ..., \lambda) \in \mathbb{R}^n\}$.
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9: *pour s'entraîner*

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{P}$) l'ensemble des fonctions impaires (resp. paires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{P}$) est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.
3. A titre d'exemples, décomposer les fonctions $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto e^x$ selon cette somme directe

Sous-espaces supplémentaires et applications linéaires

Exercice 10: *pour s'entraîner*

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x,y,z) = (x + 2y - z, x + z, y - z)$.

1. Déterminer $Ker(f)$ puis rapidement une base de $Im(f)$.
2. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Mêmes questions avec $f(x,y,z) = (x + y - 2z, x + 2y - 3z, x - y)$.

Exercice 11:

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x,y,z) = (x, y+z, y+z)$.

1. Prouver que $Ker(f) = Ker(f^2)$, $Im(f) = Im(f^2)$.
2. Montrer que $Kerf \oplus Imf = \mathbb{R}^3$.

Exercice 12:

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$ dans le cas où E est de dimension finie.
2. A l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse, montrer que ce résultat reste vrai quand E n'est plus supposé de dimension finie.

Exercice 13: *un peu plus abstrait*

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$E = Kerf \oplus Imf \qquad \Leftrightarrow \qquad Ker(f) = Ker(f^2) \text{ et } Im(f) = Im(f^2).$$

Exercice 14: ** *pour aller plus loin*

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\varphi^3 = \varphi$.

1. Montrer que $Im(\varphi^2)$ et $Ker(\varphi)$ sont supplémentaires dans E.
2. Montrer que le résultat reste vrai lorsque E est quelconque.

Exercice 15:

Soit J une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $J^2 = I_n$ et $\begin{array}{rl} S: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto S(M) = J\,M\,J \end{array}$

1. (a) Montrer que J est inversible et déterminer J^{-1}.
   (b) Montrer que l'application S ainsi définie est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est l'isomorphisme réciproque de S ?
   (c) Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$
2. Soit $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S(M) = M\}$ et soit $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S(M) = -M\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $M = M_+ + M_-$ avec $M_+ \in \mathcal{F}$ et $M_- \in \mathcal{G}$. Qu'en déduit-on ?
   (c) *Exemple dans le cas* $n = 2$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices A_+ et A_- de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
3. (a) Montrer que le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{F}$ appartient aussi à $\mathcal{F}$. Que peut-on dire du produit de deux éléments de $\mathcal{G}$?
   (b) ** Plus précisément, pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+, M_-, N_+ et N_-.

Exercice 16: * `Esc S 99`

Soit E un espace vectoriel, et u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 - 3u + 2id_E = 0$ $(*)$.
On pose $v = u - id_E$ et $w = u - 2id_E$.

1. Identifier $v - w$. En déduire que $E = Im(v) + Im(w)$.
2. Identifier $v \circ w$ et $w \circ v$. En déduire que $Im(w) \subset Ker(v)$ et $Im(v) \subset Ker(w)$.
3. Montrer alors que $E = Ker(v) \oplus Ker(w)$.

Exercice 17: `inspiré d'Edhec S 2005`

Soit $n \geq 2$ un entier supérieur ou égal à 2. On note tr l'application qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux.

Autrement dit, pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{R}$.
Un exemple dans le cas $n = 2$: $tr(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}) = 1 - 3 = -2$.

1. (a) Calculer $tr(I_n)$ où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $tr(A) = x$.
2. (a) Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $Im(tr) = \mathbb{R}$. En déduire la dimension de $Ker(tr)$.
   (c) Montrer que $Ker(tr) \cap Vect(I_n) = \{0_n\}$.
   (d) Etablir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = Ker(tr) \bigoplus Vect(I_n)$.
3. Soit f l'application qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + tr(M)I_n$
   (a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) En appliquant judicieusement la trace (forme linéaire), montrer que l'équation $M + tr(M)I_n = 0$ admet la matrice nulle comme unique solution.
   (c) Montrer que f est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18: *pour aller plus loin*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et H un sous-espace vectoriel de E. Le but est de montrer que :
$\big($ H est un hyperplan de E $\big) \Leftrightarrow \big($ il existe une forme linéaire φ non nulle telle que $H = Ker(\varphi)\big)$.

1. Rappeler la définition d'un hyperplan, d'une forme linéaire, et préciser ce que signifie que φ est non nulle.
2. Montrer le sens réciproque "$\Leftarrow$" à l'aide du théorème du rang.
3. On suppose maintenant que H est un hyperplan.
   (a) Montrer qu'il existe $\vec{e} \in E$, avec $\vec{e} \neq \vec{0}$, tel que $E = H \bigoplus Vect(\vec{e})$
   (b) Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire telle que $\varphi(e) = 1$ et pour tout $x \in H$, $\varphi(x) = 0$. Vérifier que φ est ainsi bien définie sur E.
   (c) Conclure.